Санкт-Петербургский государственный университет, 1980 год
математико-механический факультет,
факультет прикладной математики – процессов управления

Вариант 1

1. Решите неравенство $\sqrt{x+\frac{1}{x}}-\sqrt{x-\frac{1}{x}}\geq\frac{1}{\sqrt{x}}$.
2. При каких положительных значениях параметра a уравнение $\sin ax=\frac{1}{3}$ имеет ровно одно решение на отрезке $[\pi;\ 2\pi]$?
3. Пусть $ABCD$ — квадрат единичной площади, точки K и M лежат на отрезках AD и BC соответственно, $|BM|=a$. При каком выборе точки K площадь общей части треугольников AMD и BKC имеет наименьшее значение?
4. Найдите все пары действительных чисел x и y, для которых $\log_x \operatorname{tg}\frac{3\pi}{7}<\log_y \operatorname{tg}\frac{3\pi}{7}$.
5. Пусть $ABCA'B'C'$ — прямая призма с основанием ABC и высотой $|AA'|=h$. Найдите угол между плоскостью основания и плоскостью сечения, проходящего через середины ребер AC, $A'B'$ и AA', если известно, что $|AB|=|A'C'|=h$, а $\widehat{B'A'C'}=\frac{\pi}{2}$.

Вариант 2

1. Решите неравенство $\sqrt{x+\frac{1}{x^2}}+\sqrt{x-\frac{1}{x^2}}\geq\frac{2}{x}$.
2. При каких положительных значениях параметра a уравнение $\cos ax=\frac{1}{4}$ имеет ровно одно решение на отрезке $\left[\frac{\pi}{2};\ \pi\right]$?
3. Пусть $ABCD$ — квадрат единичной площади, точки K и M лежат соответственно на продолжениях сторон AD и BC, по одну сторону от прямой AB, $|BM|=a+1$, $|CM|=a$. Пусть L — точка пересечения прямых AM и BK, N — точка пересечения прямых DM и CK. При каком выборе точки K площадь треугольника $KLMN$ имеет наименьшее значение?
4. Найдите все пары действительных чисел x и y, для которых $\log_{|x|}\cos 1>\log_y \cos 1$.
5. Пусть $ABCA'B'C'$ — прямая призма с основанием ABC и высотой $|AA'|=h$. Найдите площадь сечения, проходящего через середины ребер AB, BB' и $B'C'$, если известно, что $|AB|=|BC|=h$, а $\widehat{ABC}=90^\circ$.

Вариант 3

1. Параллельные прямые l_1 и l_2 пересечены перпендикулярной им прямой l_3. Точка A удалена на расстояние $a > 0$ от каждой из прямых l_1, l_2 и на расстояние $b > 0$ от прямой l_3. Прямая l проходит через точку A и пересекает каждую из прямых l_1, l_2, l_3. Какое наименьшее расстояние может иметь сумма периметров многоугольников, образованных прямыми l_1, l_2, l_3 и l?
2. Решите уравнение $\sqrt{8x^3+4x^2+1}-\sqrt{8x^3-4x^2+1}=\sqrt{13x^3}-\sqrt{5x^3}$.
3. Решите неравенство ($b<0$) $b\log_3 x+\log_{3x}3+b \geq 0$.
4. Через ребро AB правильной пирамиды $SABC$ с вершиной S проведено сечение, имеющее наименьший периметр. Найдите площадь этого сечения, если известно, что высота пирамиды равна h, а $|AB| = a$.
5. При каких действительных значениях параметра a уравнение $\cos x\cdot\cos 2x\cdot\cos 3x+a=\cos 2x$ имеет более одного корня на отрезке $\left[\frac{\pi}{8};\frac{3\pi}{8}\right]$.

Вариант 4

1. Дуга $\overset{\smile}{AB}$ окружности радиуса r опирается на центральный угол $\alpha\neq\frac{\pi}{2}$, $\alpha\in(0;\pi)$. Через точку K, лежащую вне окружности, проведены прямые AK и BK, пересекающие окружность в точках D и C соответственно. Найдите площадь треугольника ABK, если известно, что точки C и D лежат по одну сторону от прямой AB, а площадь четырехугольника $ABCD$ наибольшая из возможных.
2. Решите уравнение $\sqrt{x^3+x+1}+\sqrt{x^3-x+1}=\sqrt{11}+\sqrt{7}$.
3. Решите неравенство ($b>0$) $\log_x 2+\log_{2x}2\geq b$.
4. Через ребро AB правильной пирамиды $SABC$ с вершиной S и некоторую точку K на ребре SC проведено плоское сечение, имеющее наименьшую площадь. Найдите SK, если известно, что плоский угол при вершине пирамиды равен α, а высота пирамиды — h.
5. При каких действительных значениях параметра a уравнение $\sin x\cdot\cos 2x\cdot\sin 3x=a$ имеет ровно два корня на отрезке $\left[\frac{\pi}{4};\frac{\pi}{2}\right]$.

Санкт-Петербургский государственный университет, 1980 год
физический факультет

Вариант 1

1. В момент времени $t \geq 0$ термометр показывает наивысшую температуру тела на промежутке $[0; t]$. Постройте график зависимости показаний термометра от времени, если температура тела меняется по закону $T = t^3 - 6at^2 + 9a^2t$, $t \geq 0$ ($a > 0$).
2. Решите уравнение $\dfrac{1 - 2\sin^2 x}{1 + \sin 2x} = (a-1)\operatorname{tg} x$.
3. Решите неравенство $\left(\log_4\left(\dfrac{x^2 + x - 3}{2}\right)\right)^{x-2} \leq 1$.
4. Основания равнобедренной трапеции равны a и b ($a > b$), а острый угол при вершине равен α. Найдите радиус окружности, проходящей через вершины трапеции и касающейся ее оси симметрии.
5. При каких $a > 0$ неравенства $x^2 + 2ax - 4 + 4a > 0$ и $ax^2 - (2a+2)x + a + 2 > 0$ не имеют общих решений?

Вариант 2

1. В момент времени $t \geq 0$ счетчик показывает дозу облучения, полученного объектом за промежуток $[0; t]$. Постройте график зависимости дозы облучения P от времени, если интенсивность облучения меняется по закону $I = \dfrac{dP}{dt} = |t - a| + |t - 2a|$, $t \geq 0$ ($a > 0$).
2. Решите уравнение $\sin^2 x + \dfrac{(1 + \cos 2x)^2}{2\sin 2x} = a\cos 2x$.
3. Решите неравенство $x^{\log_3(x^2 - 2x - 2)} > 1$.
4. Длины сторон параллелограмма равны a и b ($a > b$), а острый угол при вершине равен α. Найдите радиус окружности, проходящей через вершину этого угла и касающейся двух несмежных с ней сторон параллелограмма (или их продолжений).
5. При каких $a < 0$ неравенства $2\sqrt{ax} \leq 3a - x$ и $x - \dfrac{\sqrt{ax}}{a} \geq \dfrac{6}{a}$ имеют общие решения?

Вариант 3

1. Два парохода движутся в тумане навстречу друг другу с одинаковыми скоростями. На расстоянии 4 км капитаны включают на 4 минуты обратный ход с ускорением 0,1 $\text{м}/\text{с}^2$, после чего пароходы продолжают движение с достигнутыми скоростями. При каких значениях начальной скорости V_0 суда не столкнутся?
2. Решите уравнение $\sin 2x\left(\frac{1}{10}-\cos x\right)=\sin 2x+\frac{1}{5}\sin^3 x$.
3. Вычислите предел $\lim\limits_{x\to\pi}\dfrac{\sin x}{\int\limits_{\frac{\pi}{2}-x}^{\frac{\pi}{2}} t\,dt}$.
4. В треугольнике ABC $|AB|=|AC|=a$, $|BC|=b$, $AM\perp BC$. Высота AM разделена на 5 равных частей. Через вершину B и точки деления проведены прямые. Найдите длины отрезков, на которые эти прямые делят сторону AC.
5. Решите неравенство $2^{\frac{1}{\cos^2 x}}\sqrt{y^2-y+\frac{1}{2}}\le 1$.

Вариант 4

1. Два бегуна стартуют одновременно на дистанцию 5000 м с постоянными скоростями $V_1=4{,}99$ м/с, $V_2=5$ м/с. Первый бегун способен совершить ускорение 0,1 $\text{м}/\text{с}^2$ в течение 15 с и после этого продолжать бег с достигнутой скоростью. Когда ему еще не поздно начать ускорение, чтобы не проиграть?
2. Решите уравнение $\frac{4}{3}(\sin 2x+\cos^3 x)=\cos x\left(2-\frac{4}{3}\cos^2 x\right)$.
3. Найдите площадь фигуры, ограниченной параболой $y=2+x-x^2$ и прямой $y=2x-4$.
4. В треугольнике ABC $|AC|=a$, $|AB|=|BC|=b$, $BK\perp AC$. Отрезок AB разделен на 6 равных частей. Через вершину C и точки деления проведены прямые. Найдите длины отрезков, на которые эти прямые делят сторону BK.
5. Решите неравенство $\log_2\left(\sin(xy)+\frac{1}{\sin(xy)}\right)\le\frac{1}{y^2-6y+10}$.

Санкт-Петербургский государственный университет, 1980 год
экономический факультет
(кроме специальности «политэкономия»),
факультет психологии

Вариант 1

1. а) Сумма первых 10 членов арифметической прогрессии равна сумме следующих пяти членов, а 98-й член равен 100. Найдите сумму членов прогрессии с номерами от 50-го до 100-го (только для экономического факультета).
   б) На ребрах CC', AB и CD куба $ABCDA'B'C'D'$ выбраны соответственно точки P, Q и R так, что $|AQ| = 2|BQ|$, $|DR| = 2|AR|$, $|PC| = |PC'| = a$. Найдите площадь сечения куба, проходящего через точки P, Q и R.
2. При каких действительных α и β уравнения $x^2 + 4x\cos\alpha + 2 = 0$ и $x^2 + 4x\sin\beta + 2 = 0$ имеют хотя бы один общий корень?
3. В треугольник ABC, площадь которого S, а углы — α, β и γ, вписана окружность, центр которой — точка O. Найдите периметр треугольника, вершины которого — точки пересечения отрезков AO, BO и CO с окружностью.
4. Найдите все решения неравенства $\log_2 \sin x + \log_2 \cos x + 1 < 0$, удовлетворяющие соотношению $0 \le x \le 2\pi$.
5. При каком значении параметра $a \in \mathbb{R}$ площадь фигуры, ограниченной осью абсцисс, графиком функции $y = x^3 + 3x^2 + x + a$ и прямыми, параллельными оси ординат и пересекающими ось абсцисс в точках экстремума этой функции, будет наименьшей?

Вариант 2

1. а) Сумма первых 10 членов геометрической прогрессии вдвое больше суммы следующих пяти членов, а 41-й член равен 1. Найдите сумму членов прогрессии с номерами от 21-го до 30-го (только для экономического факультета).
   б) На ребрах BB' и BC куба $ABCDA'B'C'D'$ выбраны соответственно точки K и L так, что $|KB| = 3|KB'|$, $|BL| = |CL| = a$. Найдите площадь сечения куба, проходящего через точки D', K и L.
2. При каких действительных α и β уравнения $x^2 + 3x\cos\alpha + 1 = 0$ и $x^2 - 3x\sin\beta + 1 = 0$ имеют хотя бы один общий корень?
3. Вокруг треугольника ABC, площадь которого S, а углы — α, β и γ, описана окружность. Найдите периметр треугольника, вершины которого — середины дуг $\overset{\smile}{AB}$, $\overset{\smile}{BC}$ и $\overset{\smile}{CA}$.
4. Найдите все решения неравенства $\log_2(\sin x + \cos x) - \log_2 \sin x > 0$, удовлетворяющие соотношению $0 \le x \le 2\pi$.
5. При каком значении параметра $a \in \mathbb{R}$ площадь фигуры, ограниченной осью абсцисс, графиком функции $y = x^3 - 3x^2 + 2x + a$ и прямыми, параллельными оси ординат и пересекающими ось абсцисс в точках экстремума этой функции, будет наименьшей?

Санкт-Петербургский государственный университет, 1980 год
химический факультет

Вариант 1

1. Найдите все решения уравнения $2x^4 + x^3 + 8x^2 + 16x + 6 = 0$, удовлетворяющие неравенству $-1 \le x \le 0$.
2. При каком значении $x \in (0; 1)$ функция $y = \frac{1}{x^6} + \frac{1}{\sqrt{1-x^3}}$ принимает наименьшее значение?
3. На катетах прямоугольного треугольника как на диаметрах построены круги. Найдите площадь общей части этих кругов, если известно, что длины катетов — a и b.
4. Решите неравенство $\log_2 \log_3 x - \log_4 \log_2 x < 0$.
5. Найдите объем фигуры, получающейся при вращении вокруг прямой $y = -1$ фигуры, ограниченной графиком функции $y = \operatorname{tg} x - 1$, осью абсцисс и прямыми $x = \frac{\pi}{6}$ и $x = \frac{\pi}{4}$.

Вариант 2

1. Найдите все решения уравнения $2x^4 - 15x^3 + 7x^2 + 14x - 7 = 0$, удовлетворяющие неравенству $0 \le x \le 1$.
2. При каком значении $x \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right)$ функция $y = \frac{1}{\cos x} + \frac{1}{\sin^4 x}$ принимает наименьшее значение?
3. На высоте прямоугольного треугольника как на диаметре построена окружность. Найдите площадь части треугольника, оказавшейся вне окружности, если известно, что длины катетов треугольника — a и b.
4. Решите неравенство $\log_2 \log_3 x + \log_2 \log_2 x < 0$.
5. Найдите объем фигуры, получающейся при вращении вокруг оси абсцисс фигуры, ограниченной графиком функции $y = \frac{1}{\operatorname{tg} x}$ и прямыми $x = \frac{\pi}{6}$, $x = \frac{\pi}{3}$, $y = \frac{1}{2}$.

Санкт-Петербургский государственный университет, 1980 год
биолого-почвенный факультет

Вариант 1

1. Найдите наибольшее и наименьшее значения функции $y = \dfrac{1}{\sin x + 4} - \dfrac{1}{\cos x - 4}$.
2. Решите систему уравнений $\begin{cases} 3^{\log_x 2} = y^{\log_5 y}, \\ 2^{\log_y 3} = x^{\log_7 x}. \end{cases}$
3. Окружность радиуса r касается изнутри двух окружностей радиусов R_1 и R_2, причем центры всех трех окружностей лежат на одной прямой. Найдите радиус окружности, касающейся всех трех данных.
4. Решите уравнение $|\cos x| = \cos(x + a)$ (для специальности «почвоведение»: предлагается частный случай этой задачи: $a = \dfrac{\pi}{7}$).
5. а) Найдите объем фигуры, полученной при вращении вокруг оси абсцисс фигуры, ограниченной графиками функций $y = |x + 2| - 1$ и $y = 3 - |x - 1|$ (для специальности «биология»).

   б) Найдите объем фигуры, полученной при вращении равнобедренной трапеции вокруг ее средней линии, если основания трапеции и ее высота равны соответственно a, b и h (для специальности «почвоведение»).

Вариант 2

1. Найдите наибольшее и наименьшее значения функции $y = \dfrac{1}{\sin x + 5} + \dfrac{1}{\cos x + 5}$.
2. Решите систему уравнений $\begin{cases} 2^{\log_x 7} = y^{\log_2 y}, \\ 2^{\log_y 10} = x^{\log_2 x}. \end{cases}$
3. Две окружности радиуса R расположены таким образом, что радиус наименьшей окружности, касающейся их обеих, равен r. Найдите радиус окружности, касающейся всех трех данных.
4. Решите уравнение $|\sin x| = \sin(x - a)$ (для специальности «почвоведение»: предлагается частный случай этой задачи: $a = \dfrac{\pi}{11}$).
5. а) Найдите объем фигуры, полученной при вращении вокруг оси абсцисс фигуры, ограниченной графиками функций $y = |x + 1| - 1$ и $y = 3 - |x|$ (для специальности «биология»).

   б) Найдите объем фигуры, полученной при вращении параллелограмма вокруг его средней линии, если стороны параллелограмма равны a и b, а острый угол при вершине равен α (для специальности «почвоведение»).

Санкт-Петербургский государственный университет, 1980 год
геологический факультет,
географический факультет

Вариант 1

1. Решите уравнение $2^{\sqrt{\log_2 x-2}}+2^{-\sqrt{\log_2 x-2}}=1$.
2. На катете *AC* равнобедренного прямоугольного треугольника *ABC* выбрана точка *P* так, что полуокружность, построенная на отрезке *PC* как на диаметре, касается гипотенузы *AB*. В каком отношении полуокружность делит отрезок *PB*?
3. Решите уравнение $\sin\frac{2x+1}{x}+\sin\frac{2x+1}{3x}-3\cos^2\frac{2x+1}{3x}=0$.
4. В основании правильной призмы лежит треугольник, вершины которого являются серединами ребер основания правильной пирамиды. Какая часть объема призмы находиться вне пирамиды, если известно, что высота пирамиды в 3 раза меньше высоты призмы?
5. Найдите площадь фигуры, ограниченной осью абсцисс и графиком функции $y=x^3+6x^2+9x+2$.

Вариант 2

1. Решите уравнение $9^{\sqrt{\log_x 3}}-2\cdot 3^{\sqrt{\log_x 3}+1}+6=0$.
2. На стороне *AB* правильного треугольника *ABC* выбраны точки *K* и *L* так, что окружность, построенная на отрезке *KL* как на диаметре, касается сторон *AC* и *BC* треугольника. В каком отношении эта окружность делит отрезок *KC*?
3. Решите уравнение $\sin\frac{2-x}{x}-3\sin\frac{2-x}{3x}+3\sin^2\frac{2-x}{3x}=0$.
4. В основании правильной пирамиды лежит квадрат, середины сторон которого являются вершинами основания правильной призмы. Какая часть объема призмы находиться вне пирамиды, если известно, что высота призмы в 2 раза больше высоты пирамиды?
5. Найдите площадь фигуры, ограниченной осью абсцисс и графиком функции $y=x^3-8x^2+19x-14$.

Санкт-Петербургский государственный университет, 1980 год
экономический факультет
специальность «политэкономия»

Вариант 1

1. Сформулируйте и докажите признак перпендикулярности двух плоскостей.
2. Решите уравнение $5^{2x} = 3^{3x} + 2\cdot 5^x + 2\cdot 3^x$.
3. Равнобедренный треугольник разбит на три части одинакового размера прямыми, параллельными гипотенузе. Найдите отношение площадей этих частей.
4. Найдите все решения системы уравнений $\begin{cases} \sin(2x+3y)+\cos(2x+3y)=1, \\ \cos\left(x+\dfrac{\pi+18}{12}y\right)+\sqrt{3}\sin\left(x+\dfrac{\pi+18}{12}y\right)=2, \end{cases}$

   удовлетворяющие условию $|y|\le 1$.
5. Исследуйте функцию $y = x^2(x-1)^2(x+2)^2$.

Вариант 2

1. Сформулируйте и докажите признак перпендикулярности прямой и плоскости.
2. Решите уравнение $3^{2x} = 2^{2x} + 3^x + 2^x$.
3. Равносторонний треугольник разбит на три части одинакового периметра прямыми, параллельными одной из его сторон. Найдите отношение площадей этих частей.
4. Найдите все решения системы уравнений $\begin{cases} \sin(3x+2y)-\cos(3x+2y)=0, \\ \sqrt{3}\,\mathrm{tg}\left(x+\dfrac{3\pi+8}{12}y\right)=1+\dfrac{2}{\cos\left(x+\dfrac{3\pi+8}{12}y\right)}, \end{cases}$

   удовлетворяющие условию $|y|\le 1$.
5. Исследуйте функцию $y = x^3(x+1)^2(x+2)$.

Ответы к вариантам

Математико-механический факультет,
факультет прикладной математики – процессов управления

Ответы к варианту 1

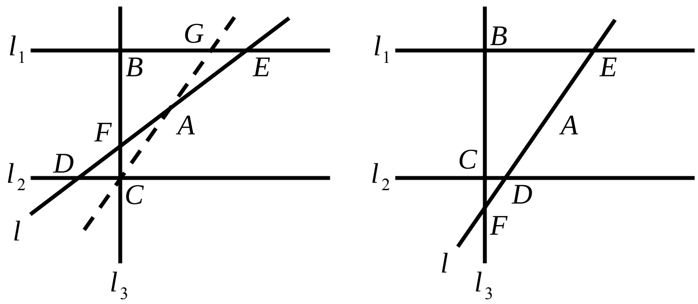
1. Ответ: $\left[1; \dfrac{\sqrt{5}}{2}\right]$.
2. Ответ: $\left[\dfrac{\arcsin\frac{1}{3}}{2\pi}; \dfrac{\arcsin\frac{1}{3}}{\pi}\right] \cup \left[\dfrac{\pi-\arcsin\frac{1}{3}}{2\pi}; \dfrac{\pi-\arcsin\frac{1}{3}}{\pi}\right] \cup \left[\dfrac{2\pi+\arcsin\frac{1}{3}}{2\pi}; \dfrac{3\pi-\arcsin\frac{1}{3}}{\pi}\right]$.
3. Ответ: если $a \in \left[0; \dfrac{1}{2}\right)$, то $K = A$, если $a \in \left(\dfrac{1}{2}; 1\right]$, то $K = D$, если $a = \dfrac{1}{2}$, то $K = A$ и $K = D$.
4. Ответ: $\{0 < y < x < 1\} \cup \{0 < x < 1 < y < +\infty\} \cup \{1 < y < x < +\infty\}$.
5. Ответ: $\alpha = \arccos\dfrac{1}{\sqrt{3}}$.

Ответы к варианту 2

1. Ответ: $\left[\dfrac{\sqrt[3]{20}}{4}; +\infty\right)$.
2. Ответ: $\left[\dfrac{\arccos\frac{1}{4}}{\pi}; \dfrac{2\arccos\frac{1}{4}}{\pi}\right] \cup \left[\dfrac{2\pi-\arccos\frac{1}{4}}{\pi}; \dfrac{2\pi+\arccos\frac{1}{4}}{\pi}\right) \cup \left(\dfrac{4\pi-2\arccos\frac{1}{4}}{\pi}; \dfrac{4\pi-\arccos\frac{1}{4}}{\pi}\right)$.
3. Ответ: точка K такова, что $|AK| = a+1$, $|DK| = a$.
4. Ответ: $\{0 < y < |x| < 1\} \cup \{0 < |x| < 1 < y < +\infty\} \cup \{1 < y < |x| < +\infty\}$.
5. Ответ: $S = \dfrac{3\sqrt{3}}{8}h^2$.

Ответы к варианту 3

1. Ответ: $2a+2b+2\sqrt{a^2+b^2}$.



2. Ответ: $\left\{0,\,1,\,\frac{1}{2}\left(-1+\sqrt{1+0{,}5\frac{1}{2}(\sqrt{65}-7)}\right)\right\}$.

3. Ответ: $(0;\,3^{-1-\sqrt{-\frac{1}{b}}}]\cup\left(\frac{1}{3};\,3^{-1+\sqrt{-\frac{1}{b}}}\right]$.

4. Ответ: если $h>\frac{a}{\sqrt{b}}$, то $\frac{3a^2h}{4\sqrt{a^2+3h^2}}$, если $h\le\frac{a}{\sqrt{b}}$, то $\frac{a}{2}\sqrt{h^2+\frac{a^2}{12}}$.

5. Ответ: $\left[\frac{2\sqrt{2}-1}{4};\,\frac{19\sqrt{19}-28}{108}\right)$.

Ответы к варианту 4

1. Ответ: $\dfrac{r^2\sin^2\frac{\alpha}{2}\left(\sin\alpha+3\sin\frac{2\pi-\alpha}{3}\right)}{2\left|\sin^2\frac{\alpha}{2}-\sin^2\frac{2\pi-\alpha}{6}\right|}$.

2. Ответ: $\{2\}$.

3. Ответ: $\left(\frac{1}{2};\,2^{\frac{2b-\sqrt{b^2+4}}{2b}}\right]\cup(1;\,2^{\frac{2b+\sqrt{b^2+4}}{2b}}]$.

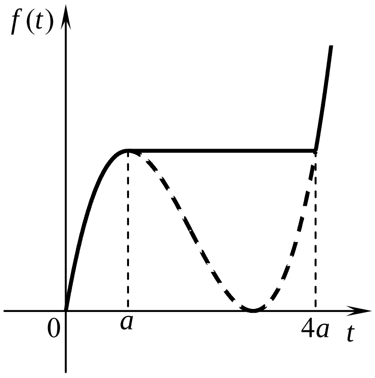
4. Ответ: если $\alpha\ge\frac{\pi}{2}$, то 0, если $\alpha<\frac{\pi}{2}$, то $\sqrt{h^2+\frac{a^2}{3}-a^2\cdot\dfrac{h^2+\frac{a^2}{12}}{h^2+\frac{a^2}{3}}}$, где $a=\sqrt{\dfrac{12h^2\sin^2\frac{\alpha}{2}}{4\cos^2\frac{\alpha}{2}-1}}$.

5. Ответ: $\left(\frac{10-7\sqrt{7}}{108};\,0\right]$.

Физический факультет

Ответы к варианту 1

1. Ответ: $f(t)=\begin{cases}(t-a)^2(t-4a),\ t\in[0;\,a]\cup[4a;\,+\infty),\\ (t-a)^2(t-4a),\ t\in[a;\,4a].\end{cases}$



2. Ответ: если $a\in(-\infty;\,-2-2\sqrt{2}]\cup[-2+2\sqrt{2};\,1)\cup(1;\,+\infty)$, то $\left\{\operatorname{arctg}\dfrac{a\pm\sqrt{a^2+4a-4}}{2(1-a)}+\pi k : k\in\mathbb{Z}\right\}$, если $a=1$, то $\left\{\dfrac{\pi}{4}+\pi k : k\in\mathbb{Z}\right\}$, если $a\in(-2-2\sqrt{2};\,-2+2\sqrt{2})$, то $\varnothing$.

3. Ответ: $\left(-\infty;\,\dfrac{-1-\sqrt{45}}{2}\right]\cup\left[2;\,\dfrac{-1+\sqrt{45}}{2}\right]$.

4. Ответ: $r=\dfrac{a+b\pm2\sqrt{ab}\sin\alpha}{4\cos^2\alpha}$.

5. Ответ: $\varnothing$ (при каждом $a>0$ общие решения имеются).

Ответы к варианту 2

1. Ответ: $P(t)=\begin{cases}3at-t^2,\ t\in[0;\,a],\\ at+a^2,\ t\in[a;\,2a],\\ t^2-3at+5a^2,\ t\in[2a;\,+\infty).\end{cases}$

2. Ответ: если $a\in[-1;\,3)$, то $\left\{-\dfrac{\pi}{4}+\pi k : k\in\mathbb{Z}\right\}$, если $a\in(-\infty;\,-1)\cup[3;\,+\infty)$, то $\left\{-\dfrac{\pi}{4}+\pi k;\ \operatorname{arctg}\dfrac{a+1\pm\sqrt{a^2-2a-3}}{2(a+1)}+\pi k : k\in\mathbb{Z}\right\}$.

3. Ответ: $(3;\,+\infty)$.

4. Ответ: $r=(a+b\pm\sqrt{2ab(1-\cos\alpha)})\operatorname{tg}\dfrac{\alpha}{2}$.

5. Ответ: $\left[-\dfrac{2}{3};\,0\right)$.

Ответы к варианту 3

1. Ответ: $[0;\, 20]$.
2. Ответ: $\left\{\pi k;\, 2\pi k \pm \arccos\frac{-3+\sqrt{5}}{6};\, 2\pi k \pm \arccos\frac{-3-\sqrt{5}}{6} : k \in \mathbb{Z}\right\}$.
3. Ответ: $\frac{2}{\pi}$.
4. Ответ: $\frac{a}{9}$, $\frac{5a}{36}$, $\frac{5a}{28}$, $\frac{5a}{21}$, $\frac{a}{3}$.
5. Ответ: $\left\{\left(\pi k;\, \frac{1}{2}\right) : k \in \mathbb{Z}\right\}$.

Ответы к варианту 4

1. Ответ: $1000 - 10\sqrt{2}$.
2. Ответ: $\left\{\frac{\pi}{2} + \pi k;\, (-1)^k \arcsin\frac{1-\sqrt{2}}{2} + \pi k : k \in \mathbb{Z}\right\}$.
3. Ответ: $\frac{125}{6}$.
4. Ответ: $\frac{2h}{7}$, $\frac{3h}{14}$, $\frac{h}{6}$, $\frac{2h}{15}$, $\frac{6h}{55}$, $\frac{h}{11}$, где $h = \sqrt{b^2 - \frac{a^2}{4}}$.
5. Ответ: $\left\{\left(\frac{\pi}{6} + \frac{2\pi k}{3};\, 3\right) : k \in \mathbb{Z}\right\}$.

Экономический факультет
(кроме специальности «политэкономия»),
факультет психологии

Ответы к варианту 1

1. а) Ответ: 3927.

   б) Ответ: $\dfrac{16a^2\sqrt{241}}{63}$.

2. Ответ: $\left\{(\alpha;\,\beta),\ \beta\pm\alpha=\dfrac{\pi}{2}+2\pi k : k\in\mathbb{Z},\ |\cos\alpha|\geq\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right\}$.

3. Ответ: $\sqrt{8S\sin\alpha\sin\beta\sin\gamma}\cdot\dfrac{\cos\dfrac{\alpha+\beta}{4}+\cos\dfrac{\alpha+\gamma}{4}+\cos\dfrac{\beta+\gamma}{4}}{\sin\alpha+\sin\beta+\sin\gamma}$.

4. Ответ: $\left(0;\,\dfrac{\pi}{4}\right)\cup\left(\dfrac{\pi}{4};\,\dfrac{\pi}{2}\right)$.

5. Ответ: $a=-1$.

Ответы к варианту 2

1. а) Ответ: 10, $\dfrac{12}{1+2^{-\frac{1}{5}}}$.

   б) Ответ: $\dfrac{13a^2\sqrt{101}}{28}$.

2. Ответ: $\left\{(\alpha;\,\beta),\ \alpha\pm\beta=\pi(2k+1) : k\in\mathbb{Z},\ |\cos\alpha|\geq\dfrac{2}{3}\right\}$.

3. Ответ: $\sqrt{\dfrac{8S}{\sin 2\alpha+\sin 2\beta+\sin 2\gamma}}\cdot\left(\sin\dfrac{\alpha+\beta}{2}+\sin\dfrac{\alpha+\gamma}{2}+\sin\dfrac{\beta+\gamma}{2}\right)$.

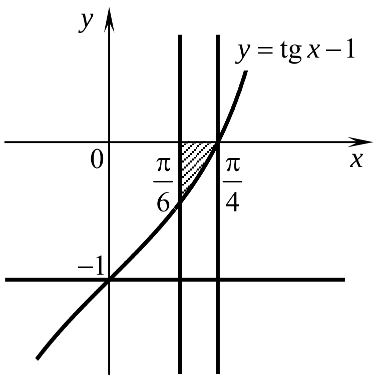
4. Ответ: $\left(0;\,\dfrac{\pi}{2}\right)$.

5. Ответ: $a=0$.

Химический факультет

Ответы к варианту 1

1. Ответ: $\left\{-\dfrac{1}{2}\right\}$.
2. Ответ: $\sqrt[3]{2}(\sqrt{1+\sqrt[3]{2^2}}-1)$.
3. Ответ: $\dfrac{a^2}{4}\operatorname{arctg}\dfrac{b}{a}+\dfrac{b^2}{4}\operatorname{arctg}\dfrac{a}{b}-\dfrac{ab}{4}$.
4. Ответ: $(1;\ 3^{\frac{1}{\log_3 2}})$.
5. Ответ: $\dfrac{\pi^2}{6}-\pi\left(1-\dfrac{\sqrt{3}}{3}\right)$.



Ответы к варианту 2

1. Ответ: $\left\{\dfrac{1}{2}\right\}$.
2. Ответ: $\arccos(2^{-\frac{1}{3}}(\sqrt{1+\sqrt[3]{2^2}}-1))$.
3. Ответ: $\dfrac{ab}{2}-\dfrac{a^2b^2}{8(a^2+b^2)}\left(\pi+\dfrac{4ab}{a^2+b^2}\right)$ (высота опущена на гипотенузу).
4. Ответ: $(1;\ 2^{\sqrt{\log_2 3}})$.
5. Ответ: $\dfrac{2\sqrt{3}\pi}{3}-\dfrac{5\pi^2}{24}$.

Биолого-почвенный факультет

Ответы к варианту 1

1. Ответ: наименьшее значение: $\dfrac{4}{8+\sqrt{2}}$, наибольшее — $\dfrac{4}{8-\sqrt{2}}$.

2. Ответ: $\left\{ 2^{\frac{\sqrt[3]{\log_2^2 7}}{\sqrt[3]{\log_3 5}}};\ 3^{\frac{\sqrt[3]{\log_3^2 5}}{\sqrt[3]{\log_2 7}}} \right\}$.

3. Ответ: $R_1 - r$, $R_2 - r$, $\dfrac{r(R_1-r)(R_2-r)}{R_1\cdot R_2 - r^2}$.

4. Ответ: если $a = 2\pi k,\ k\in\mathbb{Z}$, то $\bigcup\limits_{k\in\mathbb{Z}}\left[-\dfrac{\pi}{2}+2\pi k;\ \dfrac{\pi}{2}+2\pi k\right]$; если $a=\pi+2\pi k,\ k\in\mathbb{Z}$, то $\bigcup\limits_{k\in\mathbb{Z}}\left[\dfrac{\pi}{2}+2\pi k;\ \dfrac{3\pi}{2}+2\pi k\right]$; если $a\in\bigcup\limits_{k\in\mathbb{Z}}(4\pi k;\ \pi+4\pi k)$, то $\left\{-\dfrac{a}{2}\pm\dfrac{\pi}{4}+\left(2k+\dfrac{7}{4}\right)k : k\in\mathbb{Z}\right\}$; если $a\in\bigcup\limits_{k\in\mathbb{Z}}(\pi+4\pi k;\ 2\pi+4\pi k)$, то $\left\{-\dfrac{a}{2}\pm\dfrac{\pi}{4}+\left(2k+\dfrac{5}{4}\right)k : k\in\mathbb{Z}\right\}$; если $a\in\bigcup\limits_{k\in\mathbb{Z}}(2\pi+4\pi k;\ 3\pi+4\pi k)$, то $\left\{-\dfrac{a}{2}\pm\dfrac{\pi}{4}+\left(2k+\dfrac{3}{4}\right)k : k\in\mathbb{Z}\right\}$; если $a\in\bigcup\limits_{k\in\mathbb{Z}}(3\pi+4\pi k;\ 4\pi+4\pi k)$, то $\left\{-\dfrac{a}{2}\pm\dfrac{\pi}{4}+\left(2k+\dfrac{1}{4}\right)k : k\in\mathbb{Z}\right\}$.

5. а) Ответ: $\dfrac{27\pi}{12}$.

   б) Ответ: если $a>b$, то $\dfrac{\pi h^2(5a+b)}{24}$.

Ответы к варианту 2

1. Ответ: наименьшее значение: $\dfrac{4}{10+\sqrt{2}}$, наибольшее — $\dfrac{4}{10-\sqrt{2}}$.

2. Ответ: $\left\{ 2^{\frac{\sqrt[3]{\log_2^2 10}}{\sqrt[3]{\log_3 7}}};\ 3^{\frac{\sqrt[3]{\log_3^2 7}}{\sqrt[3]{\log_2 10}}} \right\}$.

3. Ответ: $r+R$, $r\cdot\dfrac{r+R}{|R-r|}$ ($r\neq R$).

4. Ответ: если $a = 2\pi k,\ k\in\mathbb{Z}$, то $\bigcup\limits_{k\in\mathbb{Z}}[2\pi k;\ \pi+2\pi k]$; если $a=\pi+2\pi k,\ k\in\mathbb{Z}$, то $\bigcup\limits_{k\in\mathbb{Z}}[\pi+2\pi k;\ 2\pi+2\pi k]$; если $a\in\bigcup\limits_{k\in\mathbb{Z}}(4\pi k;\ \pi+4\pi k)$, то $\left\{\dfrac{a}{2}\pm\dfrac{\pi}{4}+\left(2k+\dfrac{3}{4}\right)k : k\in\mathbb{Z}\right\}$; если $a\in\bigcup\limits_{k\in\mathbb{Z}}(\pi+4\pi k;\ 2\pi+4\pi k)$, то $\left\{\dfrac{a}{2}\pm\dfrac{\pi}{4}+\left(2k+\dfrac{5}{4}\right)k : k\in\mathbb{Z}\right\}$; если $a\in\bigcup\limits_{k\in\mathbb{Z}}(2\pi+4\pi k;\ 3\pi+4\pi k)$, то $\left\{\dfrac{a}{2}\pm\dfrac{\pi}{4}+\left(2k+\dfrac{7}{4}\right)k : k\in\mathbb{Z}\right\}$; если $a\in\bigcup\limits_{k\in\mathbb{Z}}(3\pi+4\pi k;\ 4\pi+4\pi k)$, то $\left\{\dfrac{a}{2}\pm\dfrac{\pi}{4}+\left(2k+\dfrac{1}{4}\right)k : k\in\mathbb{Z}\right\}$.

5. а) Ответ: $\dfrac{47\pi}{3}$.

   б) Ответ: если средняя линия параллельна стороне, длина которой — a, то $\left(a+\dfrac{2}{3}b\cos\alpha\right)\dfrac{\pi b^2\sin^2\alpha}{4}$.

Геологический факультет,
географический факультет

Ответы к варианту 1

1. Ответ: $\{2^{\log_2^2(2+\sqrt{3})}\}$.
2. Ответ: $\dfrac{|PM|}{|BM|} = 4(3-2\sqrt{2})$.
3. Ответ: $\left\{\dfrac{1}{\dfrac{3\pi-4}{2}+3\pi k}; \dfrac{1}{3\left((-1)^k \arcsin\dfrac{3}{4}+\pi k\right)-2} : k \in \mathbb{Z}\right\}$.
4. Ответ: $\dfrac{29}{36}$ объема призмы или весь объем.
5. Ответ: $\dfrac{9}{2}$.

Ответы к варианту 2

1. Ответ: $\{3^{(\log_3^2(3-\sqrt{3}))^{-1}}; 3^{(\log_3^2(3+\sqrt{3}))^{-1}}\}$.
2. Ответ: $\dfrac{|KM|}{|MC|} = \dfrac{2}{3}$ (M — точка пересечения окружности с отрезком KC).
3. Ответ: $\left\{\dfrac{2}{1+3\pi k}; \dfrac{1}{3\left((-1)^k \arcsin\dfrac{3}{4}+\pi k\right)+1} : k \in \mathbb{Z}\right\}$.
4. Ответ: $\dfrac{3}{4}$ объема призмы или весь объем.
5. Ответ: $\dfrac{23}{6}$.

Экономический факультет
специальность «политэкономия»

Ответы к варианту 1

1. Ответ: если плоскость проходит через перпендикуляр к другой плоскости, то она перпендикулярна этой плоскости. /«Геометрия 9-10», параграф 36/.
2. Ответ: $\{1\}$.
3. Ответ: $1:(\sqrt{2}-1)^2((\sqrt{2}-1)^2+2):(\sqrt{2}-1)^4((\sqrt{2}-1)^4+2(\sqrt{2}-1)^2+2)$.
4. Ответ: $\left\{\left(\frac{\pi}{4}-\frac{3}{2}+\pi k;\, 1\right): k\in\mathbb{Z}\right\}$.
5. Ответ: область определения — $\mathbb{R}$; функция возрастает на промежутках $\left(-2;\,\frac{-1-\sqrt{7}}{3}\right)$, $\left(0;\,\frac{-1+\sqrt{7}}{3}\right)$, $(1;\,+\infty)$, убывает на промежутках $(-\infty;\,-2)$, $\left(\frac{-1-\sqrt{7}}{3};\,0\right)$, $\left(\frac{-1+\sqrt{7}}{3};\,1\right)$; в точках -2, 0 и 1 функция достигает минимума (одновременно эти точки — корни уравнения $y=0$); В точках $\frac{-1-\sqrt{7}}{3}$ и $\frac{-1+\sqrt{7}}{3}$ функция достигает максимума; функция не является ни четной, ни нечетной, ни периодической; функция непрерывна, множество ее значений — промежуток $[0;\,+\infty)$.

Ответы к варианту 2

1. Ответ: если прямая перпендикулярна каждой из двух прямых, лежащих в плоскости, то прямая и плоскость перпендикулярны /«Геометрия 9-10», параграф 28/.
2. Ответ: $\{1\}$.
3. Ответ: $1:\frac{8-3\sqrt{3}}{3}:1$.
4. Ответ: $\left\{\left(\frac{2}{3}+\frac{3\pi}{4}+2\pi k;\, -\frac{1}{3}\right);\left(-\frac{2}{3}+\frac{5\pi}{12}+2\pi k;\, 1\right): k\in\mathbb{Z}\right\}$.