Санкт-Петербургский государственный университет, 1984 год
математико-механический факультет

Вариант 1

1. На промежутке $(1;10]$ определите наибольшее значение абсолютной погрешности приближенного вычисления $y=x^3$ по следующему правилу: если $k<x\le k+1$, $k=1, 2, \ldots, 9$, то $y=x^3$ приближенно равно значению в точке x квадратного трехчлена, совпадающего с кубом в точках 0, k, 10.
2. Решите уравнение $2\sin 7x=(\sin 6x+2\operatorname{tg} 4x)\cos 7x$.
3. При каком условии на коэффициенты a, b, c линейная замена $x=aX+bY+cZ$, $z=aZ+bX+cY$ и $y=aY+bZ+cX$ оставляет неизменной квадратичную форму

$$P(x, y, z)=(x+y+z)^2-3(x^2+y^2+z^2)\ ?$$

4. В равнобедренной трапеции диагональ перпендикулярна к боковой стороне, большее основание равно a, а меньшее основание в 2 раза длиннее боковой стороны. Найдите меньшее основание.
5. Через вершину A конуса, высота которого равна H, а радиус основания — R, проведена плоскость. Известно, что сечение ABC конуса плоскостью есть треугольник площади S. Найдите расстояние от центра основания до хорды BC.

Вариант 2

1. На промежутке $\left[\frac{1}{4}; 10\right]$ определите наибольшее значение абсолютной погрешности приближенного вычисления $y=\sqrt{x}$ по следующему правилу: если $(k-1)^2\le x<k^2$, $k=1, 2, \ldots$, то $\sqrt{x}\approx\frac{3}{8}k+\frac{3x}{4k}-\frac{x^2}{8k^3}$.
2. Решите уравнение $\sin 4x(2+\sin 14x)=2\operatorname{ctg} 3x\cdot\cos 4x$.
3. При каком условии на коэффициенты a, b линейная замена $x=aY+bZ$, $y=aZ+bX$ и $z=aX+bY$ оставляет неизменной кубическую форму $Q(x, y, z)=x^3+y^3+z^3-3xyz$?
4. В равнобедренной трапеции диагональ перпендикулярна к боковой стороне, большее основание равно a, а сумма меньшего основания и боковой стороны равна $\frac{3a}{4}$. Найдите меньшее основание.
5. Через вершину A правильного тетраэдра $ABCD$, ребро которого равно a, проведена плоскость, параллельная CD. Известно, что сечение AEF тетраэдра плоскостью есть треугольник периметра p. Найдите $|BE|$.

Санкт-Петербургский государственный университет, 1984 год
факультет прикладной механики – процессов управления

Вариант 1

1. В математической модели отбора популяций частоты x, y генов a, b соответственно преобразуются в новые частоты $x' = \dfrac{x(Ax+By)}{Ax^2+2Bxy+Cy^2}$, $y' = \dfrac{y(Bx+Cy)}{Ax^2+2Bxy+Cy^2}$ генов a, b следующего поколения (A, B, C — коэффициенты приспособленности генотипов). При $A = B$ и равенстве частот в нулевом поколении найдите отношение $C : A$, если известно, что во втором поколении на каждые 5 генов a приходится 12 генов b.
2. Решите уравнение $\operatorname{tg} 3x = 4 \operatorname{tg} x \cdot \sin\left(x + \dfrac{\pi}{3}\right) \cos\left(x + \dfrac{\pi}{6}\right)$.
3. При каком значении параметра a максимальная абсолютная погрешность на промежутке $[1; 8]$, возникшая при замене $y = \sqrt[3]{x}$ на квадратный трехчлен $y = a + \dfrac{5x}{9} - \dfrac{x^2}{9}$, будет наименьшей?
4. В окружность радиуса R вписан равнобедренный прямоугольный треугольник. На дуге, стягиваемой одним из катетов, найдите точку, для которой отношение расстояний до двух ближайших вершин есть данная величина k.
5. Шар B радиуса R и окружность имеют общий центр O. Точка A расположена на поверхности шара так, что угол между OA и плоскостью, содержащей данную окружность, равен α, а множество точек M на данной окружности, для которых $AM \cap B = \{A\}$, есть дуга соответствующая центральному углу β. Найдите радиус окружности.

Вариант 2

1. Частоты x, y генов a, b соответственно преобразуются в результате одного тура в новые частоты $x' = \dfrac{x(kx+y)}{kx^2+2xy+ky^2}$, $y' = \dfrac{y(x+ky)}{kx^2+2xy+ky^2}$ генов a, b следующего поколения. Определите первоначальные частоты, если известно, что коэффициент приспособленности $k = \dfrac{1}{2}$, а в следующем поколении на каждые 40 генов a приходится 33 гена b.
2. Решите уравнение $\cos 3x = -\cos x \cdot \operatorname{ctg}\left(x + \dfrac{\pi}{3}\right) \operatorname{ctg}\left(x + \dfrac{2\pi}{3}\right)$.
3. При каком значении $b \in [0; 1]$ максимальная абсолютная погрешность приближенной формулы $\sqrt{x} \approx b\left(\dfrac{3}{8} + \dfrac{3x}{4} - \dfrac{x^2}{8}\right) + (1-b)\left(\dfrac{3}{4} + \dfrac{3x}{8} - \dfrac{x^2}{64}\right)$ на промежутке $[1; 4]$ будет наименьшей?
4. В окружность радиуса R вписан равносторонний треугольник. Найдите на окружности точку, для которой сумма расстояний до двух ближайших вершин треугольника есть данная величина L.
5. Шар радиуса R и окружность радиуса $\dfrac{5}{4}R$ имеют общий центр O. Точка A расположена в пространстве так, что $|AO| = \dfrac{5}{4}R$ и множество точек данной окружности, которые можно соединить с A прямой, не пересекающейся с шаром, есть дуга, соответствующая центральному углу α. Найдите угол между OA и плоскостью, содержащей данную окружность.

Санкт-Петербургский государственный университет, 1984 год
физический факультет

Вариант 1

1. При столкновении двух частиц в результате их слипания и последующего расщепления рождаются три частицы одного сорта. Эти новые частицы разлетаются с одинаковой скоростью в направлениях, образующих углы α между собой. Определите наибольшую из возможных скоростей новых частиц, если известно, что одна из сталкивающихся частиц имела кинетическую энергию E, а вторая до момента столкновения покоилась и имела массу M.
2. Решите уравнение $\operatorname{tg} x + \sin x = \operatorname{tg} 2x$.
3. Решите систему уравнений $\begin{cases} 2y(3+10\log_x 2) = x^2 + x + 3y^2, \\ (x+3)^{\log_5(3-y)} = 1. \end{cases}$
4. Вершины правильного треугольника со стороной a вместе с вершинами его образа при повороте вокруг центра описанной окружности образуют шестиугольник с заданным периметром l. Найдите угол поворота.
5. В цилиндр вписана правильная четырехугольная пирамида так, что вершина пирамиды лежит на окружности основания цилиндра, а одна из сторон основания пирамиды есть хорда другого основания цилиндра, отсекающая от окружности дугу в α радиан. Найдите объем пирамиды, если радиус основания цилиндра равен R.

Вариант 2

1. При столкновении двух частиц, движущихся навстречу друг другу, в результате слипания и последующего расщепления рождается серия новых частиц общей массы M. Известно, что новые частицы разлетаются в различных направлениях, составляющих угол α с направлением движения одной из первоначальных частиц, но с одинаковыми скоростями, равными скорости второй из первоначальных частиц, прием эта вторая частица до столкновения имела импульс P. Определите наименьшую из возможных скоростей сближения сталкивающихся частиц.
2. Решите уравнение $\operatorname{ctg} x + \sin 2x = \operatorname{ctg} 3x$.
3. Решите систему уравнений $\begin{cases} \log_x\left(\dfrac{y}{9}\right) + \dfrac{3x}{y(x+9)} = 0, \\ (y-2)^{-1} = (y-2)^{-\log_9(x+8)}. \end{cases}$
4. Вершины одного квадрата лежат на границе второго квадрата. Найдите отношения длин отрезков, на которые эти вершины разбивают стороны второго квадрата, если известно, что отношение площадей квадратов равно p.
5. В цилиндр вписана правильная четырехугольная пирамида так, что одно из ее боковых ребер есть образующая цилиндра. Найдите объем пирамиды по радиусу R основания цилиндра и по величине α двугранного угла при боковом ребре пирамиды.

Санкт-Петербургский государственный университет, 1984 год
химический факультет

Вариант 1

1. Вычислите вес и пробу сплава серебра с медью, зная, что сплавив его со 100 г чистого серебра, получают сплав 0,7-й пробы, между тем, как сплавив его со 100 г другого сплава 0,4-й пробы, получат сплав 0,6-й пробы. (Проба сплава есть отношение веса благородного металла к общему весу сплава).
2. Решите уравнение $\log_2 \sqrt{9-2^{3x+1}} + \frac{3}{2}x = 1$.
3. Для каких значений параметра a множество решений неравенства $a + \sqrt{x^2 + ax} \ge x$ не пересекается с промежутком $[-1;\ 0]$?
4. Решите уравнение $\frac{\cos^4 2x + \cos 4x - 2}{\cos x(3 + \cos^2 2x)} = \sin x$.
5. В правильной треугольной пирамиде боковое ребро образует с плоскостью основания угол α, а длина стороны основания равна a. Найдите объем той части пирамиды, которая заключена между плоскостью основания и плоскостью, проходящей через сторону основания под углом φ к плоскости основания.

Вариант 2

1. Два слитка серебра с медью имеют одинаковый вес. Каждый из них сплавляют с таким количеством меди, какое имеется в другом. В результате получаются два новых слитка, отношение весов которых равно $\frac{5}{7}$, а отношение проб — $\frac{7}{8}$. Каковы пробы обоих первоначальных слитков? (Проба сплава есть отношение веса благородного металла к общему весу сплава).
2. Решите уравнение $x - \log_3 \sqrt{31 - 9^x} = 1 - \log_3 \sqrt{1 + 3^{2(1-x)}}$.
3. Для каких значений параметра a в множестве решений неравенства $x + \sqrt{x^2 - 2ax} > 1$ содержится промежуток $\left[\frac{1}{4};\ 1\right]$?
4. Решите уравнение $2(\cos^4 x + \sin x \cdot \sin 2x + \sin^4 x) = \cos x - \sin^2 2x + 4\cos 2x$.
5. В правильной четырехугольной пирамиде двугранный угол при основании равен α, а длина стороны основания равна a. Найдите объем пирамиды, отсекаемой от данной пирамиды плоскостью, проходящей через сторону основания под углом φ к плоскости основания.

Санкт-Петербургский государственный университет, 1984 год
геологический факультет,
географический факультет,
отделение лингвистики филологического факультета

Вариант 1

1. Из пункта A в пункт B, отстоящий от A на 360 км, отправился автомобиль с некоторой постоянной скоростью. Затем он выехал обратно со скоростью, на 15 км/ч большей, и возвратился в пункт A, затратив на 2 часа меньше времени, чем на поездку из A в B. Найдите первоначальную скорость автомобиля.
2. а) Решите уравнение $\sin 5x - \cos 2x + \sin x - \cos 6x = 0$ (для геологического факультета).
   б) На промежутке $[\pi; 2\pi]$ решите уравнение $\sin 5x - \cos 6x + \sin x + 2\cos 2x = 0$ (для геологического факультета и отделения матлингвистики).
3. Решите неравенство $\sqrt{\log_x 4 + 2} \cdot \log_2 x < -2\sqrt{3}$.
4. В равнобедренной трапеции $ABCD$ диагональ AC перпендикулярна к боковой стороне CD. Найдите $|BC|$, если известно, что $|AD| = a$, $|AB| + |BC| = \frac{10}{9}a$.
5. а) Каждый из плоских углов при вершине трехгранного угла равен α. Как удалена от вершины точка, которая находится внутри трехгранного угла на расстоянии a от каждой грани (для геологического и географического факультетов)?
   б) Определите высоту конуса, вписанного в шар радиуса R и имеющего наибольшую площадь полной поверхности (для отделения матлингвистики).

Вариант 2

1. Велосипедист отправился с некоторой постоянной скоростью из пункта A в пункт B, отстоящий от A на 75 км. Затем он выехал обратно с той же скоростью, но через 2 часа после выезда из пункта B был вынужден остановиться на 45 минут. После этого велосипедист продолжил путь, увеличив скорость на 5 км/ч. Найдите первоначальную скорость велосипедиста, если известно, что на обратный путь он затратил столько же времени, что и на путь от A до B.
2. а) Решите уравнение $\cos 3x - \sin 6x + \sin 2x - \cos 7x = 0$ (для геологического факультета).
   б) На промежутке $[0; \pi]$ решите уравнение $\cos 3x - \sin 6x - \cos 7x - 2\sin 2x = 0$ (для геологического факультета и отделения матлингвистики).
3. Решите неравенство $\sqrt{2 + \log_x 9} \cdot \log_{\frac{1}{3}} x < 2$.
4. В равнобедренной трапеции $ABCD$ диагональ AC перпендикулярна к боковой стороне CD. Найдите $|BC|$, если известно, что $|AD| = a$, $|AB|^2 + |BC|^2 = \frac{11}{16}a^2$.
5. а) Каждый из двугранных углов трехгранного угла равен α. Как удалена от вершины трехгранного угла точка, которая находится внутри угла на расстоянии a от каждого ребра (для геологического и географического факультетов)?
   б) Определите радиус цилиндра, вписанного в шар радиуса R и имеющего наибольшую площадь полной поверхности (для отделения матлингвистики).

Санкт-Петербургский государственный университет, 1984 год
биолого-почвенный факультет

Вариант 1

1. Из городов A и B, расстояние между которыми 180 км, отправлены в одно и то же время два поезда навстречу друг другу. После их встречи поезд, вышедший из A, прибывает в B через 2 часа, а другой прибывает в A через 4 часа 30 минут. Найдите скорость каждого поезда.
2. а) Решите уравнение $4\sin^3 x + 10\sin^2 x + 3\sin x = 6\cos\frac{3x}{2}\cdot\sin\frac{x}{2}$.

   б) Решите уравнение $2\sin^2 x = 3 + 2(\cos 2x + \sin 2x)$ (для отделения почвоведения).
3. а) Решите уравнение $\log_{x-2}(10-3x) = -1 + \log_{\sqrt{10-3x}}(16x - 3x^2 - 20)$.

   б) Решите уравнение $\log_2(9^{x-1} + 7) = 2 + \log_2(3^{x-1} + 1)$ (для отделения почвоведения).
4. Через данную точку, лежащую внутри угла, проведите прямую так, чтобы она отсекала от угла треугольник наименьшей площади. Вычислите это наименьшее значение площади.
5. Основанием пирамиды служит равнобедренный треугольник, боковые стороны которого равны a, а угол при вершине равен α. Две боковые грани пирамиды, проходящие через равные стороны основания, перпендикулярные к основанию, а боковые ребра наклонены к нему под углом α. Определите радиус шара, описанного около пирамиды.

Вариант 2

1. Расстояние между двумя городами равно 480 км. Пассажирский поезд проходит это расстояние на 4 часа скорее, чем товарный. Если скорость пассажирского поезда увеличить на 8 $\text{км}/\text{ч}$, а скорость товарного — на 2 $\text{км}/\text{ч}$, то пассажирский поезд пройдет все расстояние на 5 часов скорее товарного. Найдите скорости пассажирского и товарного поездов.
2. а) Решите уравнение $\cos^3 x - 3\cos^2 x + \cos x = 2\cos\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right)\sin\left(\frac{3x}{2}-\frac{\pi}{4}\right)$.

   б) Решите уравнение $3\sin^2 x + 5\cos^2 x = 2(1 + \sin 2x)$ (для отделения почвоведения).
3. а) Решите уравнение $\log_{\sqrt{3x-5}}(3-x) = -2 + \log_{3-x}(14x - 3x^2 - 15)$.

   б) Решите уравнение $\left(\frac{1}{3}\right)^{\log_2^2 x+1} = 9^{2-\log_2 x^3}$ (для отделения почвоведения).
4. Через данную точку, лежащую внутри угла, проведите прямую так, чтобы сумма длин отрезков, отсекаемых от сторон угла этой прямой, была наименьшей. Вычислите это наименьшее значение суммы.
5. Основанием пирамиды служит равнобедренный треугольник, боковые стороны которого равны b, а угол между ними равен α. Две боковые грани пирамиды, проходящие через равные стороны основания, перпендикулярные к основанию, а третья грань наклонена к нему под углом α. Определите радиус шара, вписанного в пирамиду.

Санкт-Петербургский государственный университет, 1984 год
факультет психологии,
экономический факультет
(отделения экономической кибернетики и ЭИР)

Вариант 1

1. а) Решите систему уравнений $\begin{cases} 2y(5+\log_x 2y) = x+40, \\ (x+2)^{y-4} = 1 \end{cases}$ (факультет психологии и отделение экономической кибернетики).
   б) Решите уравнение $\log_{\sqrt{1-3x}}(1-x) = 4 - \log_{1-x}(1-4x+3x^2)$ (отделение ЭИР).
2. а) Решите уравнение $\dfrac{\cos\left(\dfrac{\pi}{12}-x\right)-\sin\left(\dfrac{\pi}{12}-x\right)}{\sqrt{\cos^4\left(2x+\dfrac{\pi}{3}\right)+\cos\left(4x-\dfrac{\pi}{3}\right)+2}} = 1$ (факультет психологии и отделение экономической кибернетики).
   б) Решите уравнение $\cos^2 2x + 4\sin^4\left(\dfrac{\pi}{4}+x\right) = 2\cos 2x$ (отделение ЭИР).
3. В уравнении $3x^2+ax+2=0$ определите a таким образом, чтобы корни уравнения были действительными числами, а сумма кубов корней равнялась удвоенной сумме корней.
4. По основаниям a и b трапеции найдите длину заключающегося между боковыми сторонами отрезка прямой, проведенной параллельно основаниям через точку пересечения диагоналей.
5. Определите радиус шара, описанного около правильной треугольной пирамиды, если сторона основания равна a, а угол при вершине пирамиды равен α.

Вариант 2

1. а) Решите систему уравнений $\begin{cases} \log_x\left(\dfrac{y}{12}\right)+\dfrac{3x}{4y} = 0, \\ (y-2)^{x+1} = 1 \end{cases}$ (факультет психологии и отделение экономической кибернетики).
   б) Решите уравнение $\log_{\sqrt[3]{x}}(2x+1) = 1 + \log_{\sqrt{2x+1}}(2x^4+3x^3)$ (отделение ЭИР).
2. а) Решите уравнение $\dfrac{1}{2}\sin\left(\dfrac{\pi}{12}-x\right)+\dfrac{9\sin^4 2x+\cos^4 2x}{\sqrt{3}\sin^2 4x} = \cos\left(\dfrac{\pi}{12}+x\right)$ (факультет психологии и отделение экономической кибернетики).
   б) Решите уравнение $2\sin 6x = \sin^2 6x + 4\cos^4 3x$ (отделение ЭИР).
3. В уравнении $2x^2-ax+1=0$ определите a таким образом, чтобы корни уравнения были действительными числами, а сумма кубов корней равнялась $2a$.
4. По основаниям a и b трапеции найдите длину заключающегося между продолжениями диагоналей отрезка прямой, проведенной параллельно основаниям через точку пересечения продолжения боковых сторон.
5. Определите радиус шара, описанного около правильной четырехугольной пирамиды, если сторона основания равна a, а угол при вершине равен α.

Санкт-Петербургский государственный университет, 1984 год
экономический факультет
(отделения политэкономии и прикладной социологии)

Вариант 1

1. Бригада лесорубов должна была заготовить 400 кубометров дров. Эту работу лесорубы выполнили на 3 дня раньше, т.к. ежедневно они заготовляли на 30 кубометров дров больше, чем планировалось. Сколько дров заготовляла бригада ежедневно?
2. Решите уравнение $\cos 7x + \sin^2 2x = \cos^2 2x - \cos x$.
3. Решите уравнение $\left(\frac{2}{5}\right)^{\log_2^2 x+1} = \left(\frac{25}{4}\right)^{2-\log_2 x^3}$.
4. Решите неравенство $\sqrt{2+x-x^2} > 1-2x$.
5. На гипотенузе прямоугольного треугольника, вне его, построен квадрат. Определите расстояние от вершины прямого угла треугольника, до центра квадрата. Зная, что сумма катетов равна l.

Вариант 2

1. Совхоз должен был вспахать 900 гектаров пашни с помощью 6 тракторов. Увеличив число тракторов в 2 раза, а ежедневную производительность каждого трактора на 2,5 гектара, совхоз всю работу выполнил на 9 дней раньше, чем планировалось. За сколько дней совхоз выполнил эту работу?
2. Решите уравнение $\sin 3x = \cos x - \sin x$.
3. Решите уравнение $\left(\frac{4}{5}\right)^{\log_3^2 x-2\log_3 x} = \left(\frac{5}{4}\right)^{-6+\log_3 x}$.
4. Решите неравенство $\sqrt{x^2-3x+2} < 2x-1$.
5. В прямоугольном треугольнике с катетами a и b найдите длину биссектрисы прямого угла.

Ответы к вариантам

Математико-механический факультет

Ответы к варианту 1

1. Ответ: 25.
2. Ответ: $\left\{\frac{\pi k}{3} : k \in \mathbb{Z}\right\}$.
3. Ответ: $a^2 + b^2 + c^2 - ab - ac - bc = 1$.
4. Ответ: $(\sqrt{3}-1)a$.
5. Ответ: искомое расстояние: $x = \frac{\sqrt{2(R^2 - H^2) \pm 2\sqrt{(H^2 + R^2)^2 - 4S^2}}}{2}$, если $HR < S < \frac{R^2 + H^2}{2}$ и $R > H$; $x = \frac{\sqrt{2(R^2 - H^2) + 2\sqrt{(H^2 + R^2)^2 - 4S^2}}}{2}$, если $S < HR$; $x = 0$, если $S = HR$, и дополнительно $x = \sqrt{R^2 - H^2}$ при $R > H$; $x = \frac{\sqrt{2(R^2 - H^2)}}{2}$, если $S = \frac{H^2 + R^2}{2}$, $R \geq H$; если $H = R$, $R^2 \geq S$, то $x = \sqrt[4]{R^4 - S^2}$.

Ответы к варианту 2

1. Ответ: $\frac{7}{64}$.
2. Ответ: $\left\{\frac{\pi}{14} + \frac{\pi k}{7} : k \in \mathbb{Z}\right\}$.
3. Ответ: $a^3 + b^3 = 1$.
4. Ответ: $\frac{2-\sqrt{3}}{4}a$.
5. Ответ: $|BE| = \frac{2a - p + 2\sqrt{(p+a)(p-2a)}}{3}$, если $2a < p < 3a$; $|BE| = 0$, если $p = 2a$; $|BE| = a$, если $p = 3a$.

Ответы к варианту 1

1. Ответ $C : A = 2$.
2. Ответ: $\left\{\frac{\pi k}{3} : k \in \mathbb{Z}\right\}$.
3. Ответ: $a = \frac{47}{18}$.
4. Ответ: искомая точка находится на расстоянии $\sqrt{\frac{2}{k^2+\sqrt{2}k+1}}R$ или $\sqrt{\frac{2}{k^2+\sqrt{2}k+1}}kR$, $k \geq 0$ от одной из вершин треугольника.
5. Ответ: $\frac{R}{\cos\frac{\beta}{2}\cdot\cos\alpha}$.

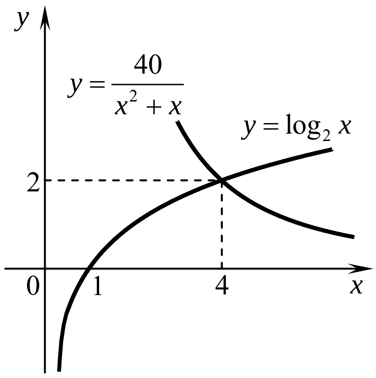
Ответы к варианту 2

1. Ответ $\frac{4}{7}$; $\frac{3}{7}$.
2. Ответ: $\left\{\frac{\pi}{6}+\frac{\pi k}{3}; \frac{\pi}{4}+\frac{\pi k}{2} : k \in \mathbb{Z}\right\}$.
3. Ответ: $b = \frac{7}{47}$.
4. Ответ: искомая точка находится на расстоянии $\frac{L \pm \sqrt{12R^2 - 3L^2}}{2}$ до одной из двух ближайших вершин треугольника ($\sqrt{3}R \leq L \leq 2R$).
5. Ответ: $\arccos\left(\frac{7}{25\cos\frac{\alpha}{2}}\right)$, $0 < \alpha \leq 2\arccos\frac{7}{25}$.

Физический факультет

Ответы к варианту 1

1. Ответ: $\sqrt{\dfrac{3E}{2M\left(3-4\sin^2\dfrac{\alpha}{2}\right)}}$.
2. Ответ: $\{\pi k : k\in\mathbb{Z}\}$.
3. Ответ: $\{(4;\,2)\}$.



4. Ответ: $\left\{\alpha+\dfrac{2\pi k}{3};\,-\alpha+\dfrac{2\pi n}{3} : k=0,1,2,\ n=1,2,3\right\}$, где $\alpha=\dfrac{\pi}{3}-2\arccos\dfrac{l}{2\sqrt{3}a}$, $3a\le l\le 2\sqrt{3}a$.
5. Ответ: $\dfrac{4}{3}\dfrac{\sin^3\dfrac{\alpha}{2}}{\sqrt{-\cos\alpha}}R^3$.

Ответы к варианту 2

1. Ответ: $\dfrac{4P}{M}(1+\cos\alpha)$.
2. Ответ: $\left\{\dfrac{\pi}{2}+\pi k : k\in\mathbb{Z}\right\}$.
3. Ответ: $\{(9;\,3)\}$.
4. Ответ: искомое отношение: $k=\dfrac{p\pm\sqrt{2p-1}}{1-p}$, если $\dfrac{1}{2}<p<1$; $k=1$, если $p=\dfrac{1}{2}$; $k=0$, если $p=1$.
5. Ответ: $\dfrac{\sin^4\alpha}{3\sin\dfrac{\alpha}{2}\sqrt{4\sin^2\dfrac{\alpha}{2}-1}}R^3$, $\dfrac{\pi}{3}<\alpha\le\dfrac{\pi}{2}$.

Химический факультет

Ответы к варианту 1

1. Ответ: 500 г; 0,64.
2. Ответ: $\left\{\frac{2}{3}; -\frac{1}{3}\right\}$.
3. Ответ: $a < -3$.
4. Ответ: $\left\{\pi k;\ (-1)^{k+1}\frac{\pi}{12} + \frac{\pi k}{2} : k \in \mathbb{Z}\right\}$.
5. Ответ: $V = \frac{1}{8}\frac{\sin\alpha\sin\varphi}{\sin(\alpha+\varphi)}a^3$.

Ответы к варианту 2

1. Ответ: 0,6; 0,8.
2. Ответ: $\left\{\frac{3}{2}\right\}$.
3. Ответ: $a < -1$.
4. Ответ: $\left\{\pm\frac{\pi}{6} + 2\pi k;\ \pm\frac{5\pi}{6} + 2\pi k : k \in \mathbb{Z}\right\}$.
5. Ответ: $V = \frac{1}{6}\frac{\sin^2\alpha\cos\varphi\sin(\alpha-\varphi)}{\cos\alpha\sin^2(\alpha+\varphi)}a^3$.

Геологический факультет,
географический факультет,
отделение лингвистики филологического факультета

Ответы к варианту 1

1. Ответ: 45 км / ч .
2. а) Ответ: $\left\{\frac{\pi}{4}+\frac{\pi k}{2};\ -\frac{\pi}{2}+2\pi k;\ \frac{\pi}{14}+\frac{2\pi k}{7} : k\in\mathbb{Z}\right\}$.

   б) Ответ: $\left\{\frac{5\pi}{4};\ \frac{7\pi}{4}\right\}$.
3. Ответ: $\left(0;\ \frac{1}{8}\right)$.
4. Ответ: $\frac{7}{9}a$ или $\frac{17}{18}a$.
5. а) Ответ: $a\sqrt{3}\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}$.

   б) Ответ: $\frac{23-\sqrt{17}}{16}R$.

Ответы к варианту 2

1. Ответ: 15 км / ч .
2. а) Ответ: $\left\{\frac{\pi k}{2};\ \frac{\pi}{18}+\frac{2\pi k}{9} : k\in\mathbb{Z}\right\}$.

   б) Ответ: $\left\{0;\ \frac{\pi}{2};\ \pi\right\}$.
3. Ответ: $\left(\frac{1}{9};\ \frac{1}{3}\right]\cup(1;\ +\infty)$.
4. Ответ: $\frac{3}{4}a$.
5. а) Ответ: $\frac{\sqrt{3}\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}}{\sqrt{3\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}-1}}$.

   б) Ответ: $\sqrt{\frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{\sqrt{5}}\right)}R$.

Биолого–почвенный факультет

Ответы к варианту 1

1. Ответ: 36 км/ч и 24 км/ч.
2. а) Ответ: $\left\{\pi k;\ -\dfrac{\pi}{2}+2\pi k : k\in\mathbb{Z}\right\}$.

   б) Ответ: $\left\{\operatorname{arctg}5+\pi k;\ -\dfrac{\pi}{4}+\pi k : k\in\mathbb{Z}\right\}$.
3. а) Ответ: $\left\{\dfrac{7}{3}\right\}$.

   б) Ответ: $\{1;\ 2\}$.

4. Ответ: наименьшее значение площади равно удвоенной площади параллелограмма, одна из вершин которого совпадает с вершиной угла, другая — с данной точкой, а остальные лежат на сторонах угла.

5. Ответ: $\dfrac{a}{2}\sqrt{1+\operatorname{tg}^2\dfrac{\alpha}{2}+\operatorname{tg}^2\alpha}$.

Ответы к варианту 2

1. Ответ: 40 км/ч и 30 км/ч.
2. а) Ответ: $\left\{\dfrac{\pi}{2}+\pi k;\ 2\pi k : k\in\mathbb{Z}\right\}$.

   б) Ответ: $\left\{\operatorname{arctg}3+\pi k;\ \dfrac{\pi}{4}+\pi k : k\in\mathbb{Z}\right\}$.
3. а) Ответ: $\left\{\dfrac{8}{3}\right\}$.

   б) Ответ: $\{2;\ 32\}$.

4. Ответ: $(\sqrt{a}+\sqrt{b})^2$, где a и b — длины сторон параллелограмма, одна из вершин которого совпадает с вершиной угла, вторая — с данной точкой, а остальные лежат на сторонах угла.

5. Ответ: $b\cos\dfrac{\alpha}{2}\operatorname{tg}\dfrac{\alpha}{4}$.

Факультет психологии,
экономический факультет
(отделения экономической кибернетики и ЭИР)

Ответы к варианту 1

1. а) Ответ: $\{(8;\, 4)\}$.
   б) Ответ: $\{-1\}$.
2. а) Ответ: $\left\{\frac{\pi}{3}+2\pi k : k\in\mathbb{Z}\right\}$.
   б) Ответ: $\left\{-\frac{\pi}{4}+\pi k;\ \pi k : k\in\mathbb{Z}\right\}$.
3. Ответ: $a=\pm 6$.
4. Ответ: $\frac{2ab}{a+b}$.
5. Ответ: $\dfrac{a\sqrt{3}}{4\sin\frac{\alpha}{2}\sqrt{2\cos\alpha+1}}$.

Ответы к варианту 2

1. а) Ответ: $\{(4;\, 3)\}$.
   б) Ответ: $\left\{\frac{1}{2};\, 1+\sqrt{2}\right\}$.
2. а) Ответ: $\left\{\frac{\pi}{12}+2\pi k : k\in\mathbb{Z}\right\}$.
   б) Ответ: $\left\{\frac{\pi}{12}+\frac{\pi k}{3};\ \frac{\pi}{6}+\frac{\pi k}{3} : k\in\mathbb{Z}\right\}$.
3. Ответ: $a=2(2+\sqrt{3})$.
4. Ответ: $\frac{2ab}{b-a}$, если $b>a$; $\frac{2ab}{a-b}$, если $a>b$.
5. Ответ: $\dfrac{a}{4\sin\frac{\alpha}{2}\sqrt{\cos\alpha}}$.

Экономический факультет
(отделения политэкономии и прикладной социологии)

Ответы к варианту 1

1. Ответ: 80 кубометров.
2. Ответ: $\left\{\frac{\pi}{8}+\frac{\pi k}{4};\ \pm\frac{\pi}{9}+\frac{2\pi k}{3} : k\in\mathbb{Z}\right\}$.
3. Ответ: $\{2;\ 32\}$.
4. Ответ: $\left(\frac{5-3\sqrt{5}}{10};\ 2\right]$.
5. Ответ: $\frac{l}{\sqrt{2}}$.

Ответы к варианту 2

1. Ответ: 6 дней.
2. Ответ: $\left\{\frac{\pi}{2}+\pi k;\ (-1)^k\frac{\pi}{12}+\frac{\pi k}{2} : k\in\mathbb{Z}\right\}$.
3. Ответ: $\left\{\frac{1}{9};\ 27\right\}$.
4. Ответ: $[2;\ +\infty)$.
5. Ответ: $\frac{ab\sqrt{2}}{a+b}$.