Санкт-Петербургский государственный университет, 1988 год
математико-механический факультет,
факультет прикладной математики – процессов управления

Вариант 1

1. Решите уравнение $\frac{\sin x}{1+\cos x}+\frac{\cos x}{1+\sin x}=2$.
2. Решите неравенство $3\sqrt{\log_3 x}-\log_3 3x\le 1$.
3. Найдите все пары $\{a; b\}$ значений параметров a и b, для которых все вещественные корни уравнения $x^2-ax+a=0$ являются такими уравнения $x^2+b^2x-8b=0$.
4. На сторонах AB и BC треугольника ABC выбраны соответственно точки D и E. Точка G является точкой пересечения прямой, параллельной BC и проходящей через D, с отрезком AE, а точка F — точка пересечения отрезка CD с прямой, проходящей через E и параллельно AB. Докажите, что GF параллельна основанию AC.
5. В прямой круговой конус вписан шар объемом V. Какое наименьшее значение может иметь объем конуса?

Вариант 2

1. Решите уравнение $\frac{1+\sin x}{1+\cos x}+\frac{1-\sin x}{1-\cos x}=2$.
2. Решите неравенство $5\sqrt{\log_2 x}-\log_2 4x-4\le 0$.
3. Найти все пары $\{a; b\}$ значений параметров a и b, для которых все вещественные корни уравнения $x^2+ax+a=0$ являются такими уравнения $bx^2+8x-b^2=0$.
4. На продолжение сторон AB и AC треугольника ABC выбраны точки E и D. Точка F является точкой пересечения продолжения отрезка CE с прямой, проходящей через E и параллельной AC. Докажите, что отрезок FG параллелен основанию BC.
5. В правильную четырех угольную пирамиду вписан шар объемом V. Какое наименьшее значение может иметь объем пирамиды?

Санкт-Петербургский государственный университет, 1988 год
физический факультет

Вариант 1

1. Решите уравнение $\frac{\sin x}{1+\cos x}+\frac{\cos x}{1+\sin x}=2$.
2. Решите неравенство $3\sqrt{\log_3 x}-\log_3 3x\le 1$.
3. Найдите все пары $\{a;\, b\}$ значений параметров a и b, для которых все вещественные корни уравнения $x^2-ax+a=0$ являются такими уравнения $x^2+b^2x-8b=0$.
4. Найдите площадь фигуры, образованной теми точками $(x;\, y)$ декартовой плоскости, для которых выполнены неравенства $|x+1|+|y|\le 2$ и $(x+2)^2+y^2\le 1$.
5. В прямой круговой конус вписан шар объемом V. Какое наименьшее значение может иметь объем конуса?

Вариант 2

1. Решите уравнение $\frac{1+\sin x}{1+\cos x}+\frac{1-\sin x}{1-\cos x}=2$.
2. Решите неравенство $5\sqrt{\log_2 x}-\log_2 4x-4\le 0$.
3. Найти все пары $\{a;\, b\}$ значений параметров a и b, для которых все вещественные корни уравнения $x^2+ax+a=0$ являются такими уравнения $bx^2+8x-b^2=0$.
4. Найти площадь фигуры, образованной теми точками $(x;\, y)$ декартовой плоскости, для которых выполнены неравенства $|x|+|y-1|\le 2$ и $x^2+(y-2)^2\le 1$.
5. В правильную четырех угольную пирамиду вписан шар объемом V. Какое наименьшее значение может иметь объем пирамиды?

Санкт-Петербургский государственный университет, 1988 год
психологический факультет

Вариант 1

1. Числа a, b, c образуют арифметическую прогрессию, а числа $a-1$, $b-4$, $c-3$ — геометрическую. Известно также, что произведение крайних членов геометрической прогрессии на 2 больше среднего члена арифметической. Найдите эти числа.
2. Решите уравнение $\sqrt{5-x^2}=x+1$.
3. Найдите все решения неравенства $1+\cos 2x \geq \cos x\cdot(1+|1-2\cos x|)$ на интервале $[0;\,2\pi]$.
4. В равнобедренном треугольнике радиус описанного круга равен R, а вписанного — r. Найдите расстояние между центрами этих кругов.
5. В параллельной треугольной пирамиде $SABC$ через ребро основания BC проведено сечение перпендикулярно ребру SA. Найдите отношение объемов частей, на которых это сечение разбивает пирамиду, если известно, что высота в два раза больше окружности, описанной вокруг основания.

Вариант 2

1. Числа x, y, z образуют геометрическую прогрессию, а числа $x+1$, $y+4$, $z+3$ — арифметическую. Известно, что сумма членов геометрической прогрессии равна 13. Найдите эти числа.
2. Решите уравнение $\sqrt{17-x^2}=3-x$.
3. Найдите все решения неравенства $\dfrac{1}{\cos^2 x}-1\geq\dfrac{|\operatorname{tg} x-\sqrt{3}|+\sqrt{3}}{\operatorname{ctg} x}$ на интервале $[0;\,\pi]$.
4. В прямоугольном треугольнике радиус описанной окружности равен R, а радиус вписанной r. Найдите расстояние между этих окружностей.
5. В правильной треугольной пирамиде $SABC$ высота равна утроенному радиусу окружности, вписанной в основание. Плоскость ADE параллельна ребру BC и перпендикулярна грани SBC. Определите отношение объемов частей, на которые эта плоскость разбивает пирамиду.

Санкт-Петербургский государственный университет, 1988 год
экономический факультет
(отделение экономической кибернетики)

Вариант 1

1. Числа a, b, c образуют арифметическую прогрессию, а числа $a-1$, $b-4$, $c-3$ — геометрическую. Известно также, что произведение крайних членов геометрической прогрессии на 2 больше среднего члена арифметической. Найдите эти числа.
2. Решите уравнение $\sqrt{5-x^2}=x+1$.
3. Решите неравенство $\left|\frac{1}{2}-\cos x\right| \geq \cos x$.
4. В равнобедренном треугольнике радиус описанного круга равен R, а вписанного — r. Найдите расстояние между центрами этих кругов.
5. В параллельной треугольной пирамиде $SABC$ через ребро основания BC проведено сечение перпендикулярно ребру SA. Найдите отношение объемов частей, на которых это сечение разбивает пирамиду, если известно, что высота в два раза больше окружности, описанной вокруг основания.

Вариант 2

1. Числа x, y, z образуют геометрическую прогрессию, а числа $x+1$, $y+4$, $z+3$ — арифметическую. Известно, что сумма членов геометрической прогрессии равна 13. Найдите эти числа.
2. Решите уравнение $\sqrt{17-x^2}=3-x$.
3. Решите неравенство $\left|\frac{1}{2}+\sin x\right| \geq -\sin x$.
4. В прямоугольном треугольнике радиус описанной окружности равен R, а радиус вписанной r. Найдите расстояние между этих окружностей.
5. В правильной треугольной пирамиде $SABC$ высота равна утроенному радиусу окружности, вписанной в основание. Плоскость ADE параллельна ребру BC и перпендикулярна грани SBC. Определите отношение объемов частей, на которые эта плоскость разбивает пирамиду.

Санкт-Петербургский государственный университет, 1988 год
экономический факультет
(отделение ЭИР)

Вариант 1

1. Числа a, b, c образуют арифметическую прогрессию, а числа $a-1$, $b-4$, $c-3$ — геометрическую. Известно также, что произведение крайних членов геометрической прогрессии на 2 больше среднего члена арифметической. Найдите эти числа.
2. Решите уравнение $\left|\frac{1}{2}+\sin x\right|=-\sin x$.
3. Решите неравенство $\log_{x+1}\left(\frac{3}{2}-x^2\right)\geq 0$.
4. Найдите минимальные и максимальные значения функции $f(x)=\frac{x}{\sqrt{x-2}}$ на интервале $(3;5)$.
5. В параллельной треугольной пирамиде $SABC$ через ребро основания BC проведено сечение перпендикулярно ребру SA. Найдите отношение объемов частей, на которых это сечение разбивает пирамиду, если известно, что высота в два раза больше окружности, описанной вокруг основания.

Вариант 2

1. Числа x, y, z образуют геометрическую прогрессию, а числа $x+1$, $y+4$, $z+3$ — арифметическую. Известно, что сумма членов геометрической прогрессии равна 13. Найдите эти числа.
2. Решите уравнение $\left|\frac{1}{2}+\sin x\right|=-\sin x$.
3. Решите неравенство $\log_{x+1}\left(\frac{3}{2}-x^2\right)\geq 0$.
4. Найдите минимальные и максимальные значения функции $f(x)=\frac{x+3}{\sqrt{x+1}}$.
5. В правильной треугольной пирамиде $SABC$ высота равна утроенному радиусу окружности, вписанной в основание. Плоскость ADE параллельна ребру BC и перпендикулярна грани SBC. Определите отношение объемов частей, на которые эта плоскость разбивает пирамиду.

Санкт-Петербургский государственный университет, 1988 год
биолого-почвенный факультет,
филологический факультет
(отделение математической лингвистики)

Вариант 1

1. Постройте график функции $f(x) = |x-1| - \left|x + \frac{3}{2}\right|$.
2. Решите уравнение $x - 1 = \sqrt{x^4 + x^3 - x^2 - 2x + 1}$.
3. Решите неравенство $\cos(2\sin x) > \frac{1}{2}$.
4. На плоскости даны две прямые α и β. Найдите геометрическое место точек, являющихся серединой отрезков, концы которых лежат на α и β.
5. Две равные правильные треугольные пирамиды $SABC$ и $S'A'B'C'$ расположены так, что $S = S'$, центры оснований O и O' совпадают, а $\angle AOA' = \frac{\pi}{6}$. Найдите объем общей части этих двух пирамид, если известно, что стороны оснований равны a, а общая высота пирамиды — h.

Вариант 2

1. Постройте график функции $f(x) = |x+1| - \left|x - \frac{5}{2}\right|$.
2. Решите уравнение $2x - 1 = \sqrt{x^4 + x^3 - 2x^2 - 4x + 1}$.
3. Решите неравенство $\cos(2\sin x) > \frac{1}{2}$.
4. На плоскости дан выпуклый четырехугольник $ABCD$. Найдите геометрическое место точек, являющихся серединой отрезков, концы которых лежат на AB и CD.
5. Две равные правильные четырехугольные пирамиды $SABCD$ и $S'A'B'C'D'$ расположены так, что $S = S'$, центры оснований O и O' совпадают, а $\angle AOA' = \frac{\pi}{6}$. Найдите объем общей части этих двух пирамид, если известно, что стороны оснований равны a, а общая высота пирамиды — h.

Санкт-Петербургский государственный университет, 1988 год
геологический факультет

Вариант 1

1. Решите систему уравнений $\begin{cases} 2x + y = 7, \\ |x - y| = 2. \end{cases}$
2. Решите уравнение $\cos^2 2x - 4\sin^4 x + 3 = 0$.
3. Решите неравенство $\log_{\frac{1}{4}}(2x+3) > \log_9 27$.
4. На сторонах треугольника *ABC* построены вне его правильные треугольники. Докажите, что круги, описанные вокруг этих треугольников, целиком покрывают треугольник *ABC*.
5. Плоскость, параллельная основанию пирамиды, делит ее на две части равного объема. В каком отношении находятся площади боковых поверхностей этих частей?

Вариант 2

1. Решите систему уравнений $\begin{cases} 3x - y = 1, \\ |x - 2y| = 2. \end{cases}$
2. Решите уравнение $\sin^2 2x + 4\cos^4 - 4 = 0$.
3. Решите неравенство $\log_{\frac{1}{27}}(3 - 2x) > \log_3 16$.
4. На сторонах выпуклого четырехугольника *ABCD* построены вне его как на гипотенузах равнобедренные прямоугольные треугольники. Докажите, что круги, писанные вокруг этих треугольников, целиком покрывают четырехугольник *ABCD*.
5. Плоскость, параллельная основанию пирамиды, делит ее на две части, имеющие равные площади поверхности. В каком отношении находятся объемы этих частей?

Санкт-Петербургский государственный университет, 1988 год
географический факультет,
экономический факультет
(отделение политэкономии, отделение прикладной социологии)

Вариант 1

1. Исследуйте функцию $f(x)=\dfrac{x^2-x+1}{x-1}$ и постройте ее график.
2. Решите уравнение $\sqrt{\cos x}=1-\sin\left(x+\dfrac{\pi}{2}\right)$.
3. Решите неравенство $\log_{x-2}(1+11x^3-x^6)<0$.
4. Найдите площадь фигуры, образованной теми точками $(x;\,y)$ декартовой плоскости, для которых выполнены условия $|x|+|y-1|\le 2$ и $x^2+y^2\ge 1-\dfrac{2}{\sqrt{3}}y$.
5. В прямой треугольной призме $ABCA'B'C'$ через точку A и среднею линию $D'E'$ основания $A'B'C'$ параллельную $A'B'$ проведено сечение. Найдите отношение объемов образовавшихся частей призмы.

Вариант 2

1. Исследуйте функцию $f(x)=\dfrac{1+x+x^2}{1+x}$ и постройте ее график.
2. Решите уравнение $\sqrt{\sin x}=1+\cos\left(1+\dfrac{\pi}{2}\right)$.
3. Решите неравенство $\log_{x-1}(1+3x^{\frac{5}{2}}-x^5)<0$.
4. Найдите площадь фигуры, образованной теми точками $(x;\,y)$ декартовой плоскости, для которых выполнены условия $|x+1|+|y|\le 2$ и $x^2+y^2-1\le 2\sqrt{3}x$.
5. В прямой треугольной призме $ABCA'B'C'$ через вершину A и середину D и E сторон BB' и CC' проведено сечение. Найдите отношение объемов образовавшихся частей призмы.

Санкт-Петербургский государственный университет, 1988 год
химический факультет

Вариант 1

1. Найдите трехзначное число, если известно, что сумма его цифр равна 12, а число, записанное теми же цифрами в противоположном порядке, меньше утроенного исходного числа на 24.
2. Решите уравнение $(7\cos^2 x - 2)\sqrt{2\cos x + 1} = 0$.
3. Решите неравенство $\sqrt{2x+3} - \sqrt{x} \geq \sqrt{3-x}$.
4. Постройте график функции $f(x) = \dfrac{x^2 - 3|x| + 4}{x}$.
5. В правильной треугольной пирамиде высота равна H, а радиус круга, вписанного в основание, равен R. Найдите объем шара, касающегося плоскостью основания в его центре и плоскости, проведенной через вершину пирамиды и середины двух сторон основания

Вариант 2

1. Найдите трехзначное число, если известно, что сумма его цифр равна 13, а число, записанное теми же цифрами в противоположном порядке, меньше утроенного исходного числа на 34.
2. Решите уравнение $(2\sin^2 x - 1)\sqrt{2 - 3\sin x} = 0$.
3. Решите неравенство $\sqrt{4-x} \leq \sqrt{x+2} - \sqrt{x-1}$.
4. Постройте график функции $f(x) = \dfrac{x^2 + 2|x| - 1}{x}$.
5. В правильной четырехугольной пирамиде высота равна H, а радиус круга, вписанного в основание, равен R. Найдите объем шара, касающегося плоскостью основания в его центре и плоскости, проведенной через вершину пирамиды и середины двух сторон основания.

Ответы к вариантам

Математико-механический факультет,
факультет прикладной математики – процессов управления

Ответы к варианту 1

1. Ответ: $\left\{-\frac{\pi}{4}+\pi k : k \in \mathbb{Z}\right\}$.
2. Ответ: $[1;\, 3] \cup [81;\, +\infty)$.
3. Ответ: $a=-64$, $b=8$; $a=0$, $b=0$; $a \in (0;\, 4)$, b — любое; $a=4$, $b=2\pm\sqrt{2}$.
4. Ответ: .
5. Ответ: $2V$.

Ответы к варианту 2

1. Ответ: $\left\{\frac{\pi}{2}+\pi k : k \in \mathbb{Z}\right\}$.
2. Ответ: $[1;\, 16] \cup [512;\, +\infty)$.
3. Ответ: $a=-2\sqrt{2}$, $b=-2\sqrt{2}$; $a=0$, $b=0$; $a \in (0;\, 4)$, b — любое; $a=4$, $b=-2\pm 2\sqrt{5}$.
4. Ответ: .
5. Ответ: $\frac{8}{\pi}V$.

Физический факультет

Ответы к варианту 1

1. Ответ: $\left\{-\frac{\pi}{4}+\pi k : k \in \mathbb{Z}\right\}$.
2. Ответ: $[1;\, 3] \cup [81;\, +\infty)$.
3. Ответ: $a=-64$, $b=8$; $a=0$, $b=0$; $a \in (0;\, 4)$, b — любое; $a=4$, $b=2\pm\sqrt{2}$.
4. Ответ: $\frac{\pi}{2}+1$.
5. Ответ: $2V$.

Ответы к варианту 2

1. Ответ: $\left\{\frac{\pi}{2}+\pi k : k \in \mathbb{Z}\right\}$.
2. Ответ: $[1;\, 16] \cup [512;\, +\infty)$.
3. Ответ: $a=-2\sqrt{2}$, $b=-2\sqrt{2}$; $a=0$, $b=0$; $a \in (0;\, 4)$, b — любое; $a=4$, $b=-2\pm 2\sqrt{5}$.
4. Ответ: $\frac{\pi}{2}+1$.
5. Ответ: $\frac{8}{\pi}V$.

Психологический факультет

Ответы к варианту 1

1. Ответ: 2, 7, 12 или 10, 7, 4.
2. Ответ: $\{1\}$.
3. Ответ: $\left[0; \frac{\pi}{3}\right] \cup \left[\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}\right] \cup \left[\frac{5\pi}{3}; 2\pi\right]$.
4. Ответ: $\sqrt{R(R-2r)}$.
5. Ответ: 7:3.

Ответы к варианту 2

1. Ответ: 1, 3, 9 или 9, 3, 1.
2. Ответ: $\{-1\}$.
3. Ответ: $\left[\frac{\pi}{3}; \frac{\pi}{2}\right) \cup \left(\frac{\pi}{2}; \pi\right]$.
4. Ответ: $\sqrt{R(R-2r)}$.
5. Ответ: 51:49.

Экономический факультет
(отделение экономической кибернетики)

Ответы к варианту 1

1. Ответ: 2, 7, 12 или 10, 7, 4.
2. Ответ: $\{1\}$.
3. Ответ: $\bigcup\limits_{k\in\mathbb{Z}}\left[2\pi k+\arccos\frac{1}{4};\ 2(k+1)\pi+\arccos\frac{1}{4}\right]$.
4. Ответ: $\sqrt{R(R-2r)}$.
5. Ответ: 7:3.

Ответы к варианту 2

1. Ответ: 1, 3, 9 или 9, 3, 1.
2. Ответ: $\{-1\}$.
3. Ответ: $\bigcup\limits_{k\in\mathbb{Z}}\left[2\pi k-\arcsin\frac{1}{4};\ 2(k+1)\pi+\arcsin\frac{1}{4}\right]$.
4. Ответ: $\sqrt{R(R-2r)}$.
5. Ответ: 51:49.

Экономический факультет
(отделение ЭИР)

Ответы к варианту 1

1. Ответ: 2, 7, 12 или 10, 7, 4.
2. Ответ: $\left\{2\pi k \pm \arccos\frac{1}{4} : k \in \mathbb{Z}\right\}$.
3. Ответ: $(-2; -\sqrt{3}] \cup (1; \sqrt{3}]$.
4. Ответ: $\min(f(x)) = 2\sqrt{2}$ при $x = 4$; максимального значения нет.
5. Ответ: 7:3.

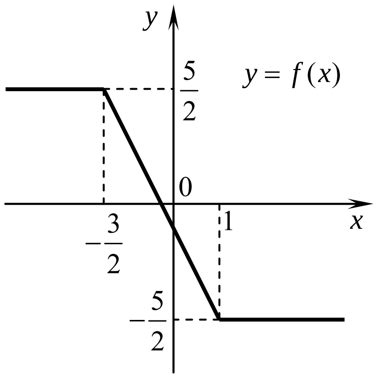
Ответы к варианту 2

1. Ответ: 1, 3, 9 или 9, 3, 1.
2. Ответ: $\left\{\pi k - (-1)^k \arcsin\frac{1}{4} : k \in \mathbb{Z}\right\}$.
3. Ответ: $\left(-1; -\frac{1}{\sqrt{2}}\right] \cup \left(0; \frac{1}{\sqrt{2}}\right]$.
4. Ответ: $\min(f(x)) = 2\sqrt{2}$ при $x = 1$; максимального значения нет.
5. Ответ: 51:49.

Биолого-почвенный факультет,
филологический факультет
(отделение математической лингвистики)

Ответы к варианту 1

1. Ответ: см. рисунок.



2. Ответ: $\{2\}$.

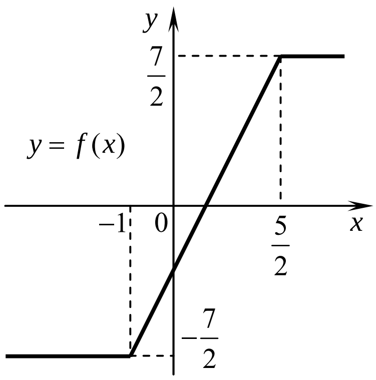
3. Ответ: $\bigcup\limits_{k\in\mathbb{Z}}\left[2\pi k-\arccos\dfrac{\pi}{6};\,2\pi k+\arccos\dfrac{\pi}{6}\right]$.

4. Ответ: если α и β параллельны, то искомое ГМТ — прямая, параллельная α и β и равноудаленная от них; если α и β не параллельны, то искомое ГМТ — вся плоскость.

5. Ответ: $\dfrac{(3-\sqrt{3})}{12}a^2h$.

Ответы к варианту 2

1. Ответ: см. рисунок.



2. Ответ: $\{1\}$.

3. Ответ: $\bigcup\limits_{k\in\mathbb{Z}}\left(2\pi k-\arcsin\dfrac{\pi}{6};\,2\pi k+\arcsin\dfrac{\pi}{6}\right)$.

4. Ответ: .

5. Ответ: $\dfrac{2(3-\sqrt{3})}{9}a^2h$.

Геологический факультет

Ответы к варианту 1

1. Ответ: $\left\{(3;1);\left(\frac{5}{3};\frac{11}{3}\right)\right\}$.
2. Ответ: $\left\{\frac{\pi}{2}+\pi k : k\in\mathbb{Z}\right\}$.
3. Ответ: $\left(-\frac{3}{2};-\frac{23}{16}\right)$.
4. Ответ: .
5. Ответ: $\frac{1}{\sqrt[3]{4}-1}$.

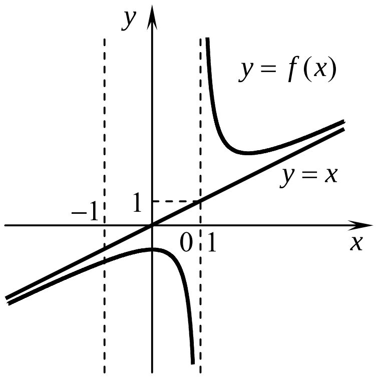
Ответы к варианту 2

1. Ответ: $\left\{(0;-1);\left(\frac{4}{5};\frac{7}{5}\right)\right\}$.
2. Ответ: $\{\pi k : k\in\mathbb{Z}\}$.
3. Ответ: $\left(\frac{121}{81};\frac{3}{2}\right)$.
4. Ответ: .
5. Ответ: $\frac{1}{2\sqrt{2}-1}$.

Географический факультет,
экономический факультет
(отделение политэкономии, отделение прикладной социологии)

Ответы к варианту 1

1. Ответ: см. рисунок.



2. Ответ: $\left\{\pm\arccos\dfrac{3-\sqrt{5}}{2}+2\pi k : k\in\mathbb{Z}\right\}$.

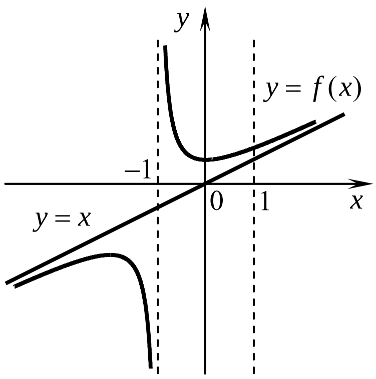
3. Ответ: $(2;\sqrt[3]{11})$.

4. Ответ: $7-\dfrac{4\pi}{9}+\dfrac{1}{\sqrt{3}}$.

5. Ответ: $\dfrac{1}{11}$.

Ответы к варианту 2

1. Ответ: см. рисунок.



2. Ответ: $\left\{(-1)^k\arcsin\dfrac{3-\sqrt{5}}{2}+\pi k : k\in\mathbb{Z}\right\}$.

3. Ответ: $(1;\sqrt[5]{9})$.

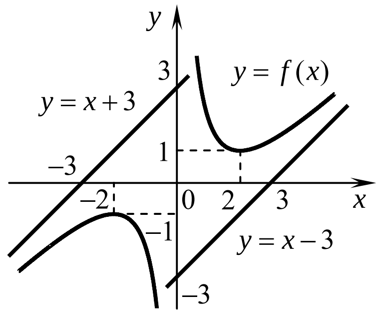
4. Ответ: $\dfrac{2\pi}{3}+1-\sqrt{3}$.

5. Ответ: $\dfrac{1}{2}$.

Химический факультет

Ответы к варианту 1

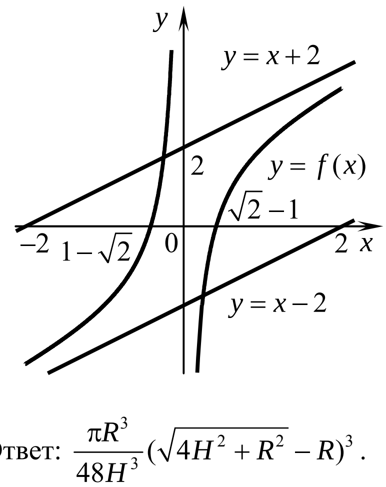
1. Ответ: 309.
2. Ответ: $\left\{\pm\arccos\dfrac{\sqrt{14}}{7}+2\pi k : k\in\mathbb{Z}\right\}$.
3. Ответ: $\left[\dfrac{3}{2};\,3\right]\cup\{0\}$.
4. Ответ: см. рисунок.



5. Ответ: $\dfrac{\pi R^3}{48H^3}(\sqrt{4H^2+R^2}-R)^3$.

Ответы к варианту 2

1. Ответ: 157.
2. Ответ: $\left\{(-1)^k\arcsin\dfrac{2}{3}+\pi k;\ (-1)^{k+1}\dfrac{\pi}{4}+\pi k : k\in\mathbb{Z}\right\}$.
3. Ответ: $\left[\dfrac{17}{5};\,4\right]\cup\{1\}$.
4. Ответ: см. рисунок.



5. Ответ: $\dfrac{\pi R^3}{48H^3}(\sqrt{4H^2+R^2}-R)^3$.