

Санкт-Петербургский государственный университет, 1989 год
факультет прикладной математики – процессов управления,
математико-механический факультет,
физический факультет

Вариант 1

1. Сумма цифр некоторого трехзначного числа равна 11. Если из числа, записанного теми же цифрами, но в обратном порядке, вычесть 594, то получится искомое число. Найдите это трехзначное число, если известно, что сумма трех попарных произведений цифр этого числа равна 31.
2. Решите неравенство $x - \sqrt{1-x} \leq 0$.
3. а) Числа x , y , a таковы, что $x + y = a - 1$, $x^2 + y^2 = 5a - 3a + \frac{1}{2}$. При каком значении a произведение $x \cdot y$ принимает наибольшее значение (математико-механический факультет)?
б) Решите уравнение $\log_{3x+7}(9 + 12x + 4x^2) + \log_{2x+3}(6x^2 + 23x + 21) = 4$ (физический факультет).
в) Решите уравнение $8 \cos x = \frac{1}{\cos x} + \frac{\sqrt{3}}{\sin x}$ (факультет прикладной математики – процессов управления).
4. Найдите площадь квадрата, вписанного в прямоугольный треугольник с катетами a и b (сторона квадрата лежит на гипотенузе, а две вершины — на катетах треугольника).
5. Все четыре грани треугольной пирамиды — равные равнобедренные треугольники, длина боковых сторон которых равна $\sqrt{3}$. Найдите длину оснований этих треугольников, если известно, что объем пирамиды равен $\frac{2}{3}$.

Вариант 2

1. Сумма квадратов цифр некоторого трехзначного числа равна 74, а цифра сотен равна удвоенной сумме цифр десятков и единиц. Найдите это число, если известно, что разность между ними и числом, записанным теми же цифрами, но в обратном порядке, равна 495.
2. Решите неравенство $x + \sqrt{2-x} > 0$.
3. а) Числа x , y , a таковы, что $x + y = a + 1$, $xy = a^2 - 3a + 4$. При каком значении a сумма $x^2 + y^2$ принимает наибольшее значение (математико-механический факультет)?
б) Решите уравнение $\log_{1-2x}(6x^2 - 5x + 1) - \log_{1-3x}(4x^2 - 4x + 1) = 2$ (физический факультет).
в) Решите уравнение $4 \cos x \cos 2x = \cos x - \sqrt{3} \sin x$ (факультет прикладной математики – процессов управления).
4. В прямоугольный треугольник вписан квадрат (сторона квадрата лежит на гипотенузе, а две вершины — на катетах треугольника). В каком отношении вершина квадрата делит катет треугольника, если известно, что угол, противолежащий этому катету, равен α .
5. Гранями треугольной пирамиды являются равные равнобедренные треугольники, длина боковых сторон которых равна a . Найдите длину оснований этих треугольников, при которой объем пирамиды принимает максимальное значение.

Санкт-Петербургский государственный университет, 1989 год
биолого-почвенный факультет

Вариант 1

1. Два лыжника стартовали один за другим с интервалом в две минуты. Второй лыжник догнал первого на расстоянии 1 км от точки старта. Дойдя до поворота на отметке 5 км, второй лыжник повернул обратно и встретился с первым лыжником. Эта встреча произошла через 20 минут после старта первого лыжника. Найдите скорость первого лыжника.
2. Решите уравнение $\log_3(3^x - 8) = 2 - x$.
3. а) Решите уравнение $\sqrt{10 - 18\cos x} = 6\cos x - 2$ (отделение почвоведения).
б) При каких значениях параметра a уравнение $\cos(\sqrt{a - x^2}) = 1$ имеет ровно 8 решений?
4. В окружность радиуса r вписана равнобедренная трапеция с острым углом α при основании и высотой h . Найдите площадь трапеции.
5. Объем правильной треугольной призмы равен V , угол между диагоналями двух граней, проведенными из одной и той же вершины, равен α . Найдите сторону основания призмы.

Вариант 2

1. Два бегуна стартовали с интервалом в 6 минут. Второй бегун догнал первого в двух километрах от точки старта, а пробежав от точки старта 5 км, он повернул обратно и встретил первого на расстоянии 1 км от точки поворота. Найдите скорость первого бегуна.
2. Решите уравнение $\log_2(2^x - 7) = 3 - x$.
3. а) Решите уравнение $\sqrt{5 - 2\sin x} = 6\sin x - 1$ (отделение почвоведения).
б) При каких значениях параметра a уравнение $\sin(\sqrt{a - x^2}) = 1$ имеет ровно 7 решений?
4. Найдите радиус окружности, описанной около равнобедренной трапеции с острым углом α при основании, если известно, что площадь трапеции равна S .
5. Площадь боковой поверхности правильной четырехугольной призмы равна S , угол между диагоналями двух граней, проведенными из одной и той же вершины, равен α . Найдите длину бокового ребра призмы.

Санкт-Петербургский государственный университет, 1989 год
химический факультет

Вариант 1

1. Из колбы, в которой имеется 80 г 10%-го раствора поваренной соли, отливают некоторую часть раствора в пробирку и выпаривают до тех пор, пока процентное содержание соли в пробирке не повысится втрое. После этого выпаренный раствор выливают обратно в колбу. В результате содержание соли в колбе повышается на 2%. Определите, какое количество раствора отлили из колбы в пробирку.
2. Решите уравнение $(x^2 - 4)\sqrt{x+1} = 0$.
3. Решите уравнение $\sin x = \sqrt{\sin^2 3x - \sin^2 2x}$.
4. В остроугольном треугольнике ABC проведены высоты CD и AE . Найдите длину высоты AE , если известно, что $AB = 6$, $AD = BC = 4$.
5. Вычислите объем правильной треугольной пирамиды, зная, что плоский угол при вершине равен α , а радиус окружности, описанной около боковой грани, равен r .

Вариант 2

1. Из колбы, в которой имеется раствор поваренной соли, отливают в пробирку $\frac{1}{7}$ часть раствора и выпаривают до тех пор, пока процентное содержание соли в пробирке не повысится вдвое. После этого выпаренный раствор выливают обратно в колбу. В результате содержание соли в колбе повышается на 2%. Определите исходное процентное содержание соли.
2. Решите уравнение $(x^2 - 1)\sqrt{2x-1} = 0$.
3. Решите уравнение $\sin 2x = \sqrt{\cos^2 3x - \cos^2 x}$.
4. В остроугольном треугольнике ABC проведена высота BD . Найдите длину стороны AB , если известно, что $AC = 3$, $BD = \sqrt{3}$ и $AD = BC$.
5. Вычислите объем правильной четырехугольной пирамиды, зная, что плоский угол при основании боковой грани равен α , а радиус окружности, описанной около боковой грани, равен r .

Вариант 1

1. Два мотоциклиста, выехав одновременно из пункта A , едут с разными, но постоянными скоростями в пункт B и, достигнув его, сейчас же поворачивают обратно. Первый мотоциклист, обогнав второго, встречает его на обратном пути на расстоянии 13 км от B , затем, достигнув A и снова повернув обратно к B , он встречает второго мотоциклиста, проехав $\frac{1}{7}$ расстояния от A до B . Найдите расстояние от A до B .

2. а) Решить уравнение $\frac{\log_3 \frac{3}{x}}{\log_x 2} - \log_2 \left(\frac{x^3}{\sqrt{3}} \right) = \frac{1}{2} + \log_2 \sqrt{x}$ (географический факультет).

б) Решить уравнение $\sqrt{1+4x-x^2} = x-1$ (геологический факультет).

3. Решите уравнение $\sin 7x - \sin x + 2 \cos^2 2x = 1$.
4. Найдите углы прямоугольного треугольника, если известно, что радиус вписанной окружности равен 2 см, а гипотенуза — 13 см.
5. а) Угол между боковым ребром и основанием правильной четырехугольной пирамиды равен 60° , боковое ребро равно a . Через середину одного из боковых ребер перпендикулярно к нему проведена плоскость. Найдите площадь сечения (географический факультет).
- б) Решите неравенство $\log_{\frac{x+1}{5}}(x^2 - 6x + 9) \geq 0$ (геологический факультет).

Вариант 2

1. Два велосипедиста, выехав одновременно из пункта A , едут с разными, но постоянными скоростями в пункт B и, достигнув его, сейчас же поворачивают обратно. Второй велосипедист, обогнав первого, встречает его на обратном пути, проехав $\frac{1}{8}$ расстояния от B до A . Достигнув A , и снова повернув обратно к B , он встречает первого велосипедиста, проехав 21 км после последнего поворота. Найдите расстояние от A до B .

2. а) Решить уравнение $\log_3 \sqrt{x} - 2 = \frac{\log_2 \left(\frac{1}{x} \right)}{\log_x 3} + \log_2 \left(\frac{x^3}{4} \right)$ (географический факультет).

б) Решить уравнение $\sqrt{4-6x-x^2} = x+4$ (геологический факультет).

3. Решите уравнение $\sin 7x + \sin 3x + 2 \sin^2 x = 1$.
4. Найдите стороны прямоугольного треугольника, если известно, что радиус вписанной окружности равен 6 см, а радиус описанной — 17 см.
5. а) Угол между боковым ребром и основанием правильной четырехугольной пирамиды равен 60° , высота равна h . Через точку на высоте, отстоящую на $\frac{h}{3}$ от вершины, проведена плоскость, перпендикулярно одному из боковых ребер. Найдите площадь сечения (географический факультет).
- б) Решите неравенство $\log_{\frac{x+1}{4}}(x^2 - 4x + 4) \geq 0$ (геологический факультет).

Санкт-Петербургский государственный университет, 1989 год
филологический факультет
отделение математической лингвистики

Вариант 1

1. От пристани A одновременно отправились вниз по течению катер и плот. Катер спустился вниз по течению на 96 км, затем повернул обратно и вернулся в A через 14 часов. Найдите скорость катера в стоячей воде и скорость течения, если известно, что катер встретил плот на обратном пути на расстоянии 24 км от A .
2. Решите уравнение $\log_{1+x}(2x^3 + 2x^2 - 3x + 1) = 3$.
3. Найдите все решения $\sqrt{\frac{1}{2} - \cos 2x} > \sin x - \cos x$, удовлетворяющие условию $0 \leq x \leq \pi$.
4. Вне квадрата $ABCD$ дана точка O . Найдите площадь квадрата, если известно, что $OA = OB = 5$ и $DO = \sqrt{13}$.
5. В правильной четырехугольной пирамиде двугранный угол при основании равен α . Найдите двугранный угол при боковом ребре.

Вариант 2

1. Два самолета вылетают одновременно из пунктов A и B навстречу друг другу и встречаются на расстоянии 300 км от середины AB . Если бы первый самолет вылетел на 1 час позже, то они встретились бы на середине AB . Если же, наоборот, второй самолет вылетел бы на 1 час позже первого, то они встретились бы на четверти пути от B . Найдите расстояние AB и скорости самолетов.
2. Решите уравнение $\log_{1-x}(4x^2 - 9x + 1) = 3$.
3. Найдите все решения неравенства $\sqrt{\cos x - \sin x} > \sin x - \frac{1}{2}$, удовлетворяющие условию $0 \leq x \leq \pi$.
4. Внутри квадрата $ABCD$ дана точка O . Найдите площадь квадрата, если известно, что $OC = OD = \sqrt{10}$ и $OB = \sqrt{26}$.
5. В правильной четырехугольной пирамиде двугранный угол при боковом ребре равен α . Найдите плоский угол при вершине пирамиды.

Санкт-Петербургский государственный университет, 1989 год
факультет психологии,
экономический факультет

Вариант 1

1. Из пункта A в пункт B выехал грузовой автомобиль. Через 1 час из пункта A в пункт B выехал легковой автомобиль, который прибыл в пункт B одновременно с грузовым автомобилем. Если бы грузовой автомобиль и легковой автомобиль одновременно выехали из пунктов A и B навстречу друг другу, то они бы встретились через 1 час 12 минут после выезда. Сколько времени провел в пути от A до B грузовой автомобиль?
2. а) Решите уравнение $x = 1 + \sqrt{7 - x}$ (отделение политэкономики).
б) Решите уравнение $\sqrt{7x + 1} - \sqrt{3x - 18} = \sqrt{2x + 7}$.
3. а) Решите неравенство $x^{2 \lg x} \geq 10x$ (экономический факультет).
б) Решите уравнение $2 \sin x + 2 \cos x + 1 = \sin 2x + 4(\sin^3 x + \cos^3 x)$ (факультет психологии).
4. Около прямоугольного треугольника ABC описана окружность. Найдите катеты этого треугольника, если известно, что расстояние от концов гипотенузы до прямой, касающейся окружности в вершине прямого угла треугольника, равны a и b .
5. а) Центр сферы совпадает с центром основания кругового конуса, а радиусы их равны. Найдите радиус окружности, по которой сфера пересекает конус, если известны высота конуса H и угол его осевого сечения α (факультет психологии и отделение экономической кибернетики).
б) Изобразите на плоскости множество точек $M(x; y)$, для которых $2|x - y - 2| \leq 3 - x^2 - y^2$.

Вариант 2

1. Из пункта A в пункт B выехал мотоциклист. Через 2 часа из пункта A в пункт B выехал автомобиль, который прибыл в пункт B одновременно с мотоциклистом. Если бы автомобиль и мотоциклист одновременно выехали из пунктов A и B навстречу друг другу, то они бы встретились через 1 час 20 минут после выезда. Сколько времени провел в пути от A до B мотоциклист?
2. а) Решите уравнение $2 + \sqrt{14 - x} = x$ (отделение политэкономики).
б) Решите уравнение $\sqrt{x - 2} - \sqrt{6x - 11} + \sqrt{x + 3} = 0$.
3. а) Решите неравенство $x^{\frac{1}{10} + \frac{1}{5} \lg x} \geq \sqrt{x}$ (экономический факультет).
б) Решите уравнение $\sin x - \cos x = 1 + \sin 2x + 2(\sin^3 x - \cos^3 x)$ (факультет психологии).
4. Около прямоугольного треугольника ABC описана окружность. Из вершин A и C опущены перпендикуляры AM и CN на прямую, касающуюся окружности в вершине прямого угла B . Найдите катеты AB и BC , если известно, что расстояние от точки M до прямой AB равно x , а расстояние от точки N до прямой BC — y .
5. а) На высоте кругового конуса, как на диаметре, построена сфера, которая пересекает конус по некоторой окружности. Найдите радиус этой окружности, если радиус основания конуса равен R , а угол осевого конуса равен α (факультет психологии и отделение экономической кибернетики).
б) Изобразите на плоскости множество точек $M(x; y)$, для которых $\frac{3}{2} - x^2 - y^2 \geq |x + y - 1|$.

Ответы к вариантам

Математико-механический факультет,
факультет прикладной математики – процессов управления

Ответы к варианту 1

1. Ответ: 137.

2. Ответ: $\left(-\infty; \frac{\sqrt{5}-1}{2}\right]$.

3. а) Ответ: 0.

б) Ответ: $\left\{-\frac{1}{4}\right\}$.

в) Ответ: $\left\{\frac{\pi}{3} + \pi k; \frac{\pi}{12} + \frac{\pi k}{2} : k \in \mathbb{Z}\right\}$.

4. Ответ: $\frac{(a^2 + b^2)a^2b^2}{(a^2 + b^2 + ab)^2}$.

5. Ответ: 2.

Ответы к варианту 2

1. Ответ: 813.

2. Ответ: $(-2; 2]$.

3. а) Ответ: 3.

б) Ответ: $\left\{\frac{1}{4}\right\}$.

в) Ответ: $\left\{\frac{\pi}{3} + \frac{\pi k}{2} : k \in \mathbb{Z}\right\}$.

4. Ответ: $\frac{\sin 2\alpha}{2}$.

5. Ответ: $\frac{2a}{\sqrt{3}}$.

Ответы к варианту 1

1. Ответ: 12 км/ч.
2. Ответ: {2}.
3. а) Ответ: $\left\{ \pm \frac{\pi}{3} + 2\pi k : k \in \mathbb{Z} \right\}$.
б) Ответ: $a \in (36\pi^2; 64\pi^2)$.
4. Ответ: $h\sqrt{4r^2 \sin^2 \alpha - h^2}$.
5. Ответ: $\left(\frac{8V \sin\left(\frac{\alpha}{2}\right)}{\sqrt{3 - 12 \sin^2\left(\frac{\alpha}{2}\right)}} \right)^{\frac{1}{3}}, \alpha < \frac{\pi}{3}$.

Ответы к варианту 2

1. Ответ: 10 км/ч.
2. Ответ: {3}.
3. а) Ответ: $\left\{ (-1)^k \frac{\pi}{6} + \pi k : k \in \mathbb{Z} \right\}$.
б) Ответ: $a = \frac{169}{4} \pi^2$.
4. Ответ: $\frac{\sqrt{S^2 + a^4 \sin^4 \alpha}}{2a \sin^2 \alpha}$.
5. Ответ: $\left(\frac{S\sqrt{2 \cos \alpha}}{8 \sin\left(\frac{\alpha}{2}\right)} \right)^{\frac{1}{2}}, \alpha < \frac{\pi}{2}$.

Ответы к варианту 1

1. Ответ: 20 г.
2. Ответ: $\{-1; 2\}$.
3. Ответ: $\left\{ \pi k; \frac{\pi}{6} + 2\pi k; \frac{5\pi}{6} + 2\pi k; \frac{\pi}{2} + 2\pi k : k \in \mathbb{Z} \right\}$.
4. Ответ: $AE = 3\sqrt{3}$.
5. Ответ: $\frac{2r^3 \sin^2 \alpha}{3} \sqrt{3 \cos^2 \left(\frac{\alpha}{2} \right) - \sin^2 \alpha}$, $\alpha < \frac{2\pi}{3}$.

Ответы к варианту 2

1. Ответ: 26%.
2. Ответ: $\left\{ \frac{1}{2}; 1 \right\}$.
3. Ответ: $\left\{ \frac{\pi}{3} + \pi k; \frac{\pi k}{2} : k \in \mathbb{Z} \right\}$.
4. Ответ: $AB = \sqrt{7}$.
5. Ответ: $\frac{4r^3 \sin^2 2\alpha}{3} \sqrt{4 \sin^2 \alpha - 2 \sin^2 2\alpha}$, $\alpha < \frac{\pi}{2}$.

Ответы к варианту 1

1. Ответ: 182 г.
2. а) Ответ: $\left\{\frac{\sqrt{3}}{8}\right\}$.
б) Ответ: $\{3\}$.
3. Ответ: $\left\{\frac{\pi}{8} + \frac{\pi k}{4}; (-1)^{k+1} \frac{\pi}{18} + \frac{\pi k}{3}; k \in \mathbb{Z}\right\}$.
4. Ответ: $\arctg\left(\frac{12}{5}\right), \arctg\left(\frac{5}{12}\right)$.
5. а) Ответ: $\frac{a^2\sqrt{3}}{6}$.
б) Ответ: $[2; 3) \cup (3; 4) \cup (4; +\infty)$.

Ответы к варианту 2

1. Ответ: 84 г.
2. а) Ответ: $\left\{\frac{27}{\sqrt{2}}\right\}$.
б) Ответ: $\{-1\}$.
3. Ответ: $\left\{\frac{\pi}{4} + \frac{\pi k}{2}; (-1)^k \frac{\pi}{30} + \frac{\pi k}{5}; k \in \mathbb{Z}\right\}$.
4. Ответ: 16 см, 30 см, 34 см..
5. а) Ответ: $\frac{h^2\sqrt{3}}{18}$.
б) Ответ: $[1; 2) \cup (2; 3) \cup (3; +\infty)$.

Ответы к варианту 1

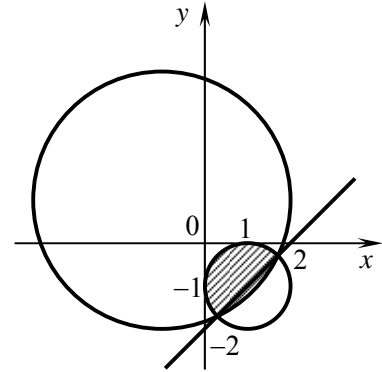
1. Ответ: 14 км/ч; 2 км/ч.
2. Ответ: {3}.
3. Ответ: $\left[\frac{\pi}{6}; \frac{5\pi}{8} - \frac{1}{2} \arcsin\left(\frac{\sqrt{2}}{4}\right) \right)$.
4. Ответ: 2.
5. Ответ: $\arccos(-\cos^2 \alpha)$, $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$.

Ответы к варианту 2

1. Ответ: 2400 км; 800 км/ч; 480 км/ч.
2. Ответ: {-3}.
3. Ответ: $\left[0; \arccos\left(\frac{\sqrt{6}-1}{2}\right) \right)$.
4. Ответ: 32.
5. Ответ: $\arccos\left(\operatorname{ctg}^2\left(\frac{\alpha}{2}\right)\right)$, $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$.

Ответы к варианту 1

1. Ответ: 3 часа.
2. а) Ответ: $\{3\}$.
б) Ответ: $\{9\}$.
3. а) Ответ: $\left[0; \frac{1}{\sqrt{10}}\right] \cup [10; +\infty)$.
б) Ответ: $\left\{-\frac{\pi}{4} + (-1)^k \arcsin\left(\frac{1}{2\sqrt{2}}\right) + \pi k; \frac{\pi}{4} + \pi k : k \in \mathbb{Z}\right\}$.
4. Ответ: $\sqrt{a(a+b)}, \sqrt{b(a+b)}$.
5. а) Ответ: $H \cos \alpha \operatorname{tg}\left(\frac{\alpha}{2}\right)$.
б) Ответ: см. рисунок.



Ответы к варианту 2

1. Ответ: 4 часа.
2. а) Ответ: $\{5\}$.
б) Ответ: $\{6\}$.
3. а) Ответ: $(0; 1] \cup [100; +\infty)$.
б) Ответ: $\left\{\frac{\pi}{4} + (-1)^{k+1} \frac{\pi}{4} + \pi k; \frac{3\pi}{4} + \pi k : k \in \mathbb{Z}\right\}$.
4. Ответ: $\frac{x^2 + y^2}{y}, \frac{x^2 + y^2}{x}$.
5. а) Ответ: $R \cos^2\left(\frac{\alpha}{2}\right)$.
б) Ответ: см. рисунок.

