Санкт-Петербургский государственный университет, 1991 год
математико-механический факультет,
факультет прикладной математики – процессов управления

Вариант 1

1. Решите неравенство $2x+4<\sqrt{5x^2-20}+\sqrt{36-x^2}$.
2. Тангенсы половинных углов прямоугольного треугольника образуют арифметическую прогрессию. Найдите углы треугольника.
3. Найдите все вещественные значения a, при которых все решения неравенства $8\log_a x+\log_x a\le 6$ удовлетворяют неравенству $\cos\left(\frac{\pi x^2}{a^2}\right)\ge\frac{1}{2}$.
4. Вершина прямоугольного угла равнобедренного прямоугольника треугольника является центром круга, площадь которого равна площади треугольника. В каком отношение окружность делить катеты треугольника?
5. В кубе с ребром 1 расположен конус так, что его вершина совпадает с вершиной куба и он касается трех боковых граней куба и вписанного в куб шара. Найдите объем шара.

Вариант 2

1. Решите уравнение $1-3x<\sqrt{10x^2-1}+\sqrt{2-x^2}$.
2. Тангенс углов треугольника образует арифметическую прогрессию, причем наименьший угол равен $45°$. Найдите углы треугольника.
3. Найдите все вещественные значения a, при которых все решения неравенства $8\log_a x-\log_x a\ge 2$ удовлетворяют неравенству $\sin\left(\frac{\pi x^2}{a^2}\right)\ge-\frac{1}{2}$.
4. Вершина острого угла равнобедренного прямоугольника треугольника является центром круга, площадь которого равна площади треугольника. В каком отношение окружность делит гипотенузу треугольника.
5. В правильном тетраэдре с ребром 1 расположен конус так, что его вершина совпадает с вершиной тетраэдра и он касается трех граней тетраэдра и вписанного в тетраэдр шара. Найдите объем конуса.

Санкт-Петербургский государственный университет, 1991 год
факультет психологии,
филологический факультет
(отделение математической лингвистики)

Вариант 1

1. Представьте число 99 в виде суммы двух натуральных чисел, сумма кубов которых минимальна.
2. Решите неравенство $|x+2|-3 \le \sqrt{3x^2-3}$.
3. Решите неравенство $\log_{2x^2}(x+2)+\log_{2x^2}(4-x) \le 1$.
4. Решите уравнение (a — вещественное число) $\sqrt{\sin x}+\sqrt{\sin\left(x+\frac{\pi}{2}\right)}=\sqrt[4]{a}$.
5. а) Диаметр шара совпадает с высотой правильной четырехугольной пирамиды, в которой двугранный угол при основании равен a. Вычислите отношение площадей полной поверхности пирамиды и шара (отделение математической лингвистики).
   б) В кубе с ребром 1 расположен конус так, что его вершина совпадает с вершиной куба и он касается трех боковых граней куба и вписанного в куб шара. Найдите объем шара (факультет психологии).

Вариант 2

1. Представьте число 101 в виде суммы двух натуральных чисел, сумма кубов которых максимальна.
2. Решите неравенство $||x+3|-2| \le \sqrt{3x^2-3}$.
3. Решите неравенство $\log_{3x^2}(x+2)+\log_{3x^2}(5-x) \ge 1$.
4. Решите уравнение (a — вещественное число) $\sqrt{\cos x}+\sqrt{\cos\left(x+\frac{\pi}{2}\right)}=\sqrt[4]{a}$.
5. а) Диаметр шара совпадает с высотой правильной треугольной пирамиды, в которой двугранный угол при основании равен α. Вычислить отношение площадей полной поверхности пирамиды и шара (отделение математической лингвистики).
   б) В правильном тетраэдре с ребром 1 расположен конус так, что его вершина совпадает с вершиной тетраэдра и он касается трех граней тетраэдра и вписанного в тетраэдр шара. Найдите объем конуса (факультет психологии).

Санкт-Петербургский государственный университет, 1991 год
биолого-почвенный факультет,
экономический факультет
(отделения ЭКИБ, ЭИР)

Вариант 1

1. Решите систему уравнений $\begin{cases} \sin x^2 - \sin y = 1, \\ x^2 + |y| = \dfrac{\pi}{3}. \end{cases}$
2. Решите неравенство $\sqrt[3]{x^3 + |x| - 1} \ge 2x - 1$.
3. Решите уравнение $\log_2(5\cos 3x - 2) + \log_{\frac{1}{2}}(1 - 6\sin^2 x \cos^2) = 3$.
4. Для каких значений a неравенство $4^{x+1} + 9 \cdot 4^{-x} - 2(2^{x+1} + 3 \cdot 2^{-x}) \ge a$ выполняется при всех $x \ge 0$?
5. В цилиндре с высотой h и радиусом основания z расположен квадрат так, что две его вершины лежат на окружности одного основания, а две другие — на окружности другого основания. Вычислите площадь квадрата.

Вариант 2

1. Решите систему уравнений $\begin{cases} \sin x + \sin y^2 = 1, \\ |x| + y^2 = \dfrac{\pi}{3}. \end{cases}$
2. Решите неравенство $\sqrt[3]{1 - |x| + x^3} \le 1 + 2x$.
3. Решите уравнение $\log_2(6\cos^2 x - 2\sin^2 x) = 3 - \log_{\frac{1}{2}}(1 - 3\sin^4 x)$.
4. Для каких значений a неравенство $16 \cdot 9^x + 9^{1-x} - 2(4 \cdot 3^x + 3^{1-x}) \ge a$ выполняется для всех $x \le 0$?
5. В цилиндре с высотой h, и радиусом основания z, расположена трапеция так, что одно ее основание равно a и соединяет две некоторые точки одной окружности основания, а второе равно b и соединяет две точки другой окружности основания цилиндра. Вычислите площадь трапеции.

Санкт-Петербургский государственный университет, 1991 год
физический факультет

Вариант 1

1. Постройте график функции $f(x) = x^2 - 4x + 2 - |4x - x^2|$.
2. Найдите все значения параметра a, для которых уравнение $\sin x + \cos x = \sin a + \cos a$ не имеет решения на $[0; \pi]$.
3. Найдите все решения неравенства $\lg\sin\frac{x}{2} < \lg\cos x$ принадлежащие промежутку $[0; 2\pi]$.
4. В равнобочной трапеции средняя линия равна a, угол при основании равен $\frac{\pi}{4}$, а расстояние между параллельными сторонами равно b. Вычислите объем тела, получающегося при вращении трапеции вокруг средней линии.
5. Две вершины квадрата лежат на оси абсцисс, а две другие — на кривой $y = x - x^2$. Вычислите площадь квадрата.

Вариант 2

1. Постройте график функции $f(x) = |6x + x^2| - 6x - x^2 + 3$.
2. Найдите все значения параметра a, при которых уравнение $\sin x - \cos x = \sin a - \cos a$ не имеет решения на $\left[\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}\right]$.
3. Найдите все решения неравенства $\log_{\frac{1}{2}}\cos\frac{x}{2} < \log_{\frac{1}{2}}\cos x$, принадлежащие $[0; 2\pi]$.
4. В трапеции верхнее основание равно a, один угол при нижнем основании равен $\frac{\pi}{4}$, другой прямой, и расстояние между основаниями равно b. Вычислите объем тела, получавшегося при вращении трапеции вокруг меньшей стороны.
5. Две вершины квадрата лежат на оси абсцисс, а две другие — на кривой $y = 2x + x^2$. Вычислите площадь квадрата.

Санкт-Петербургский государственный университет, 1991 год

геологический факультет,

географический факультет,

факультет геоэкологии

Вариант 1

1. Постройте график функции $f(x) = ||5 + x| - |2 - x||$.
2. Решите неравенство $x + \sqrt{6 + x - x^2} < 1$.
3. Решите уравнение $\sin^2 x + \sin^2 2x - 2\cos 2x = 0$.
4. Решите уравнение $\log_3 \sqrt{1+x} + \log_{\sqrt{1+x}} 27 + \log_{\frac{1}{3}} 81 = 0$.
5. Гипотенуза углов прямоугольного треугольника образуют арифметическую прогрессию, а произведение длин катетов равно $\sqrt{3}$. Вычислите периметр треугольника.

Вариант 2

1. Постройте график функции $f(x) = ||x - 2| - |3 + x||$.
2. Решите неравенство $1 + \sqrt{4 + 3x - x^2} < x$.
3. Решите уравнение $\cos^2 x + \sin^2 2x - 3\cos 2x = 0$.
4. Решите уравнение $\log_2 \sqrt{2-x} - \log_{\sqrt{2-x}} 4 - \frac{1}{6}\log_{\sqrt{2}} 8 = 0$.
5. Гипотенуза прямоугольного треугольника равна 4. Найдите длины катетов, если известно, что величина углов треугольника образуют арифметическую прогрессию.

Санкт-Петербургский государственный университет, 1991 год
факультет социологии,
экономический факультет
(отделения МЭО, ПЭЖ)

Вариант 1

1. а) Решите уравнение $\sqrt{9\cdot 2^2-4^x-14}=5-2^x$ (ПЭЖ).

   б) При каких значениях параметра a уравнение $\sqrt{\sin x+a}=a+1$ имеет решения (отделение МЭО, факультет социологии)?
2. Постройте график функции $f(x)=\left|\cos^2 x-\dfrac{1}{4}\right|+\left|\dfrac{1}{4}-\sin^2 x\right|$ на отрезке $[0;\,2\pi]$.
3. Решите неравенство $\dfrac{2}{2\log_{\frac{1}{2}}^2 x-5\log_2 x+2}<\dfrac{3}{3\log_2^2+2\log_{\frac{1}{2}} x-8}$.
4. Решите уравнение $\sin(x+1)+\cos(x-1)=\cos x$.
5. Куб и шар имеют общий центр и равные площади поверхности. Ребро куба равно 1. Вычислите площади поверхности куба, расположенной вне шара.

Вариант 2

1. а) Решите уравнение $\sqrt{11\cdot 3^x-9^x-24}=6-3^x$ (ПЭЖ).

   б) При каких значениях параметра a уравнение $\sqrt{\cos x-a}=1-a$ имеет решения (отделение МЭО, факультет социологии)?
2. Постройте график функции $f(x)=\left|\dfrac{3}{4}-\cos^2 x\right|+\left|\sin^2 x-\dfrac{3}{4}\right|$ на отрезке $[0;\,2\pi]$.
3. Решите неравенство $\dfrac{2}{2\log_3^2-3\log_{\frac{1}{3}} x-5}>\dfrac{3}{3\log_{\frac{1}{3}}^2+10\log_3 x+3}$.
4. Решите уравнение $\sin(x-1)-\cos(x+1)=\sin x$.
5. Основание конуса вписано в грань куба с ребром 1. Объемы конуса и куба равны. Центр куба принадлежит конусу. Вычислите объем части куба, расположенной вне конуса.

Санкт-Петербургский государственный университет, 1991 год
химический факультет

Вариант 1

1. Из двух городов, расстояние между которыми равно 105 км, навстречу друг другу одновременно выезжают два велосипедиста, при этом скорость одного из них на 25% меньше скорости другого. Через 3 часа они находились на расстоянии 21 км друг от друга. Найдите скорости велосипедистов.
2. Постройте график функции $f(x) = \left| \log_{\frac{1}{2}} |x| + 2 \right|$.
3. Решите неравенство $\sqrt{1 - 2x^3 + x^6} \le x - 1$.
4. Решите уравнение $\sqrt{\sin x} + \cos x = 0$.
5. Диаметр шара совпадает с высотой конуса. Найдите угол при вершине осевого сечения конуса, если известно, что объемы конуса и шара равны.

Вариант 2

1. Один велосипедист догоняет другого со скоростью, на 25% большей, чем у другого велосипедиста. В начальный момент времени расстояние между ними составило 14 км, а через 4 часа пути — 2 км. Найдите скорости велосипедистов.
2. Постройте график функции $f(x) = \left| 3 - \log_{\frac{1}{3}} |x| \right|$.
3. Решите неравенство $\sqrt{1 + 2x^3 + x^6} \le x + 1$.
4. Решите уравнение $\sqrt{\cos x} + \sin x = 0$.
5. Диаметр шара совпадает с высотой правильной четырехугольной пирамиды. Найдите угол наклона боковой грани пирамиды к плоскости основания, если известно, что объемы шара и пирамиды равны.

Ответы к вариантам

Математико-механический факультет,
факультет прикладной математики – процессов управления

Ответы к варианту 1

1. Ответ: $[-6; -2] \cup \left(\dfrac{6}{\sqrt{5}}; 2\sqrt{5}\right)$.
2. Ответ: $\left\{2\operatorname{arctg}(\sqrt{5}-2); \dfrac{\pi}{2} - 2\operatorname{arctg}(\sqrt{5}-2); \dfrac{\pi}{2}\right\}$.
3. Ответ: $[3; +\infty)$.
4. Ответ: $(\sqrt{2\pi}-1):1$.
5. Ответ: $\dfrac{\pi(\sqrt{3}-1)^3}{48}$.

Ответы к варианту 2

1. Ответ: $\left(-1; -\dfrac{1}{\sqrt{5}}\right) \cup \left[\dfrac{1}{\sqrt{10}}; 2\right]$.
2. Ответ: $\left\{\dfrac{\pi}{4}; \operatorname{arctg} 2; \dfrac{3\pi}{4} - \operatorname{arctg} 2\right\}$.
3. Ответ: $\left[\left(\dfrac{6}{7}\right)^{\frac{2}{5}}; 1\right)$.
4. Ответ: $(\sqrt{2\pi}-1):1$.
5. Ответ: $\dfrac{\pi\sqrt{6}}{864}$ или $\dfrac{\pi\sqrt{6}}{108}$.

Факультет психологии,
филологический факультет
(отделение математической лингвистики)

Ответы к варианту 1

1. Ответ: 49, 50.
2. Ответ: $(-\infty;\,-2\,]\cup[\,1;\,+\infty)$.
3. Ответ: $\left(-2;\,-\dfrac{4}{3}\right]\cup\left(-\dfrac{1}{\sqrt{2}};\,0\right)\cup\left(0;\,\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)\cup[2;\,4)$.
4. Ответ: $\left\{\dfrac{1}{2}\arcsin(3a+1-\sqrt{8a(a+1)})+2\pi k;\ \dfrac{\pi}{2}-\dfrac{1}{2}\arcsin(3a+1-\sqrt{8a(a+1)})+2\pi k : k\in\mathbb{Z}\right\}$

при $a\in[1;\,8]$; $\varnothing$ при $a\in\mathbb{R}\setminus\{1;\,8\}$.

5. а) Ответ: $\dfrac{4}{\pi}\dfrac{1+\cos\alpha}{\mathrm{tg}^2\,\alpha\cos\alpha}$.

   б) Ответ: $\dfrac{\pi(\sqrt{3}-1)^3}{48}$.

Ответы к варианту 2

1. Ответ: 1, 100.
2. Ответ: $(-\infty;\,-1\,]\cup[\,2;\,+\infty)$.
3. Ответ: $\left[-\dfrac{5}{4};\,-\dfrac{1}{\sqrt{3}}\right)\cup\left(\dfrac{1}{\sqrt{3}};\,2\right]$.
4. Ответ: $\left\{\dfrac{1}{2}\arcsin(\sqrt{8a(a+1)}-3a-1)+2\pi k;\ \dfrac{\pi}{2}-\dfrac{1}{2}\arcsin(\sqrt{8a(a+1)})-3a-1+2\pi k : k\in\mathbb{Z}\right\}$

при $a\in[1;\,8]$; $\varnothing$ при $a\in\mathbb{R}\setminus\{1;\,8\}$.

5. а) Ответ: $\dfrac{3\sqrt{3}}{\pi}\dfrac{1+\cos\alpha}{\mathrm{tg}^2\,\alpha\cos\alpha}$.

   б) Ответ: $\dfrac{\pi\sqrt{6}}{864}$ или $\dfrac{\pi\sqrt{6}}{108}$.

Биолого-почвенный факультет,
экономический факультет
(отделения ЭКИБ, ЭИР)

Ответы к варианту 1

1. Ответ: $\left\{\left(\frac{\sqrt{6\pi}}{6}; -\frac{\pi}{6}\right); \left(-\frac{\sqrt{6\pi}}{6}; -\frac{\pi}{6}\right)\right\}$.
2. Ответ: $(-\infty; 0] \cup \left[\frac{5}{7}; 1\right]$.
3. Ответ: $\left\{-\frac{1}{2}\arccos\frac{2}{3} + \pi k; \frac{1}{2}\arccos\frac{2}{3} + \pi k : k \in \mathbb{Z}\right\}$.
4. Ответ: $(-\infty; 4(3-\sqrt{6})]$.
5. Ответ: h^2 или $2r^2 + \frac{h^2}{2}$ при $h \le 2r$; $\varnothing$ при $h > 2r$.

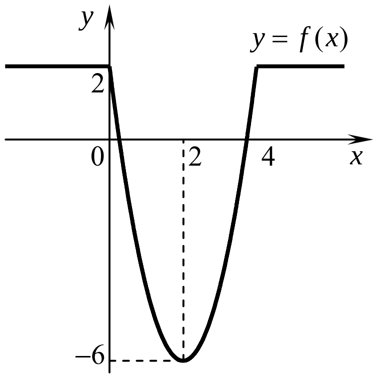
Ответы к варианту 2

1. Ответ: $\left\{\left(\frac{\pi}{6}; \frac{\sqrt{6\pi}}{6}\right); \left(\frac{\pi}{6}; -\frac{\sqrt{6\pi}}{6}\right)\right\}$.
2. Ответ: $\left[-1; -\frac{5}{7}\right] \cup [0; +\infty)$.
3. Ответ: $\left\{-\frac{\pi}{4} + \pi k; \frac{\pi}{4} + \pi k : k \in \mathbb{Z}\right\}$.
4. Ответ: $(-\infty; 8(3-\sqrt{3})]$.
5. Ответ: $\frac{a+b}{4}\sqrt{h^2 + \left(\frac{\sqrt{4r^2-a^2}}{2} - \frac{\sqrt{4r^2-b^2}}{2}\right)^2}$ или $\frac{a+b}{2}\sqrt{h^2 + \left(\frac{\sqrt{4r^2-a^2}}{2} - \frac{\sqrt{4r^2-b^2}}{2}\right)^2}$.

Физический факультет

Ответы к варианту 1

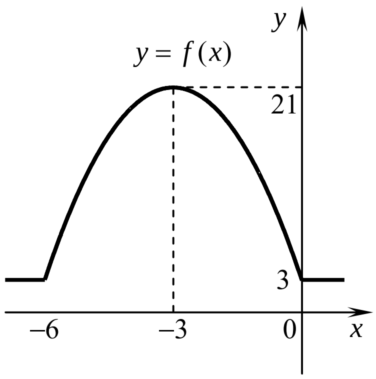
1. Ответ: $f(x)=\begin{cases}2x^2-8x+2,\ x\in\mathbb{R}\setminus[0;\,4],\\ 2,\ 0\le x\le 4\end{cases}$ (см. рисунок).



2. Ответ: $\left(\pi+2\pi k;\ \dfrac{3\pi}{2}+2\pi k : k\in\mathbb{Z}\right)$.
3. Ответ: $\left(0;\ \dfrac{\pi}{3}\right)\cup\left(\dfrac{5\pi}{3};\ 2\pi\right)$.
4. Ответ: $\dfrac{\pi b^3(3a+2b)}{12}$.
5. Ответ: $9-4\sqrt{5}$ или $9+4\sqrt{5}$.

Ответы к варианту 2

1. Ответ: $f(x)=\begin{cases}3,\ x\in\mathbb{R}\setminus[-6;\,0],\\ -2x^2-12x+3,\ -6\le x\le 0\end{cases}$ (см. рисунок).

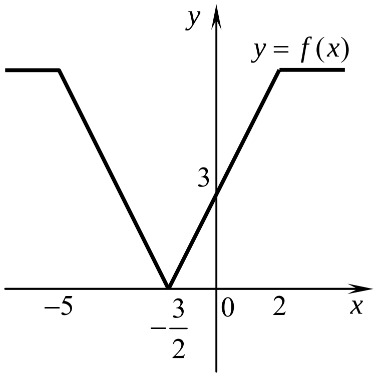


2. Ответ: $\left(-\dfrac{\pi}{2}+2\pi k;\ 2\pi k : k\in\mathbb{Z}\right)$.
3. Ответ: $\left(0;\ \dfrac{\pi}{2}\right)$.
4. Ответ: $\dfrac{\pi((a+b)^3-a^3)}{3}$.
5. Ответ: $12-8\sqrt{2}$ или $12+8\sqrt{2}$.

Геологический факультет,
географический факультет,
факультет геоэкологии

Ответы к варианту 1

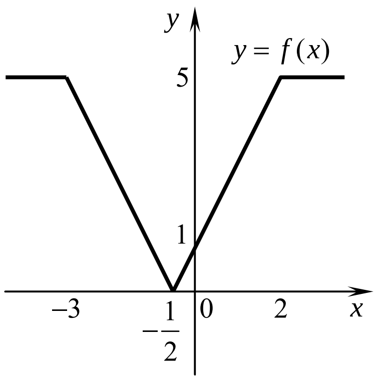
1. Ответ: $f(x)=\begin{cases}7,\ x\le -5,\\ |2x+3|,\ -5\le x\le 2,\\ 7,\ x\ge 2\end{cases}$ (см. рисунок).



2. Ответ: $[-2;-1)$.
3. Ответ: $\left\{-\frac{\pi}{6}+\pi k;\ \frac{\pi}{6}+\pi k : k\in\mathbb{Z}\right\}$.
4. Ответ: $\{8;\ 728\}$.
5. Ответ: $3+\sqrt{3}$.

Ответы к варианту 2

1. Ответ: $f(x)=\begin{cases}5,\ x\le -3,\\ |-2x-1|,\ -3\le x\le 2,\\ 5,\ x\ge 2\end{cases}$ (см. рисунок).

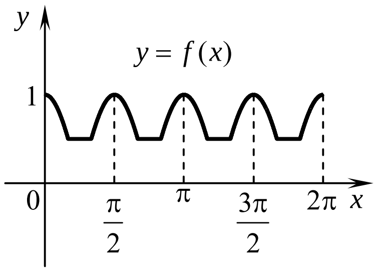


2. Ответ: $(3;\ 4]$.
3. Ответ: $\left\{-\frac{\pi}{6}+\pi k;\ \frac{\pi}{6}+\pi k : k\in\mathbb{Z}\right\}$.
4. Ответ: $\left\{-14;\ \frac{7}{4}\right\}$.
5. Ответ: 2; $2\sqrt{3}$.

Факультет социологии,
экономический факультет
(отделения МЭО, ПЭЖ)

Ответы к варианту 1

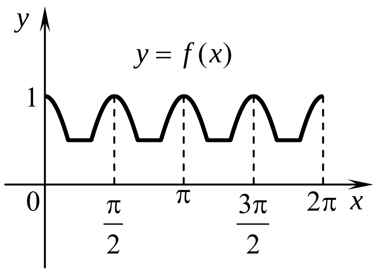
1. а) Ответ: $\{\log_2 3\}$.
   б) Ответ: $[-1; 0]$.
2. Ответ: см. рисунок.



3. Ответ: $\left(0; \dfrac{1}{2\sqrt[3]{2}}\right) \cup (\sqrt{2}; 4)$.
4. Ответ: $\left\{\operatorname{arctg}\dfrac{1-\sin 1-\cos 1}{\sin 1+\cos 1}+\pi k : k \in \mathbb{Z}\right\}$.
5. Ответ: $\dfrac{3\pi}{2}-3$.

Ответы к варианту 2

1. а) Ответ: $\{\log_3 4\}$.
   б) Ответ: $[0; 1]$.
2. Ответ: см. рисунок.

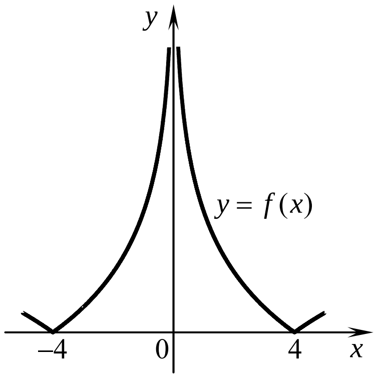


3. Ответ: $\left(\dfrac{1}{27}; \dfrac{1}{\sqrt[3]{3}}\right) \cup (3\sqrt{3}; +\infty)$.
4. Ответ: $\left\{\operatorname{arctg}\dfrac{\sin 1+\cos 1}{\sin 1+\cos 1-1}+\pi k : k \in \mathbb{Z}\right\}$.
5. Ответ: $\left(1-\dfrac{\pi}{12}\right)^3$.

Химический факультет

Ответы к варианту 1

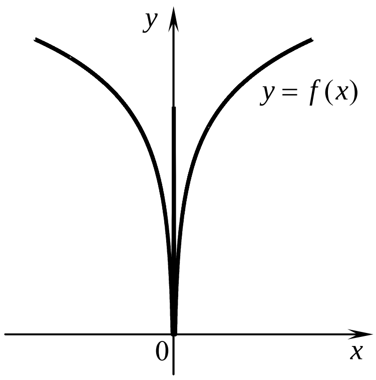
1. Ответ: $\{(16; 12); (24; 18)\}$.
2. Ответ: см. рисунок.



3. Ответ: $\{1\}$.
4. Ответ: $\left\{\pi - \arcsin\left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right) + 2\pi k : k \in \mathbb{Z}\right\}$.
5. Ответ: $2\operatorname{arctg}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$.

Ответы к варианту 2

1. Ответ: $\{(16; 20); (12; 15)\}$.
2. Ответ: см. рисунок.



3. Ответ: $[0; 1] \cup \{-1\}$.
4. Ответ: $\left\{-\arccos\left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right) + 2\pi k : k \in \mathbb{Z}\right\}$.
5. Ответ: $\operatorname{arctg}\left(\frac{2\sqrt{2\pi}}{\pi}\right)$.