**Санкт-Петербургский государственный университет, 1992 год**
математико-механический факультет,
факультет прикладной математики – процессов управления

## Вариант 1

1. Из одного пункта выходят три дороги под углом $120°$ друг к другу. Одновременно из него выходят три пешехода с постоянными скоростями, образующими арифметическую прогрессию. Через 2 часа расстояние между самым медленным и самым быстрым пешеходами равнялось $2\sqrt{76}$ км, а между самым медленным и третьим пешеходом — $2\sqrt{61}$ км. Найдите скорости пешеходов.
2. Решите уравнение $3-4\sin x=\sqrt{2\sin x-1}$.
3. Найдите все вещественные значения параметра $a$ такие, при которых неравенство $a(2+\sin^2 x)^4+\cos^2 x+a>11$ выполняется для всех $x$.
4. Дан прямоугольный треугольник с катетами 3 и 4. Диаметр круга совпадает с большим катетом. Вычислите площади частей круга, на которые он разбивается гипотенузой треугольника.
5. Дан цилиндр объема $V$. Определите его высоту и радиус основания, при которых периметр осевого сечения цилиндра имеет наименьшее значение.

## Вариант 2

1. Из вершины правильной треугольной пирамиды с плоским углом $60°$ при вершине одновременно начинают движение вдоль боковых ребер три точки с постоянными скоростями, образующими арифметическую прогрессию. Вычислите скорости движения точек, если известно, что через три секунды после начала движения расстояние между самой быстрой и самой медленной точкой равнялось $3\sqrt{37}$ см, а расстояние между самой быстрой и третьей точкой равнялось $3\sqrt{39}$.
2. Решите уравнение $\sqrt{13-18\operatorname{tg} x}=6\operatorname{tg} x-3$.
3. Найдите все вещественные значения параметра $a$ такие, при которых неравенство $a(3-\cos^2 x)^3-\sin^2 x+a<5$ выполняется для всех $x$.
4. Дан прямоугольный треугольник с катетами 3 и 4. Диаметр окружности совпадает с меньшим катетом. Вычислите длины дуг окружности, на которые она разбивается гипотенузой треугольника.
5. Периметр осевого сечения цилиндра равен $p$. Вычислите наибольшее значение объема цилиндра.

**Санкт-Петербургский государственный университет, 1992 год**
факультет психологии,
филологический факультет
(отделение математической лингвистики)

## Вариант 1

1. Из одного пункта выходят две дороги под углом $60°$ друг к другу. Сначала по одной из них выходит первый пешеход, а через один час по другой дороге — второй. Их скорости постоянны. Через два часа после выхода второго пешехода расстояние между ними равнялось $\sqrt{73}$ км, а еще через час — 12 км. Надите скорости пешеходов.
2. Решите систему уравнений $\begin{cases} 2^{x+y} = 2^x + 2^y, \\ \sqrt{2^x - 2^y} = \sqrt{2^x} - \sqrt{2^y}. \end{cases}$
3. Среди всех решений уравнений $\sin x + \cos x = \sin ax$, где $a$ — произвольное вещественное число, найдите наименьшее положительное.
4. Изобразите на координатной плоскости множество точек, удовлетворяющих уравнению $(x - |x|)^2 + (y - |y|)^2 = 4$.
5. Вершины острых углов прямоугольного треугольника с катетами 3 и 4 лежат на полуокружности ,а больший катет лежит на диаметре полуокружности. Вычислите длины дуг, на которые полуокружность разбивается гипотенузой треугольника.

## Вариант 2

1. По двум дорогам, угол между которыми равен $45°$, два пешехода начинают движение одновременно по направлению к точке пересечения дорог. Их скорости постоянны. В начальный момент расстояние между пешеходами равнялось $\sqrt{17}$ км, а через час — $\sqrt{10}$ км. Найдите скорости пешеходов, если известно, что один пешеход достиг точки пересечения дорог за 4 часа, а второй — за 5 часов.
2. Решите систему уравнений $\begin{cases} 3^{x+y} = 3^x + 3^2 - 3^y, \\ \sqrt{3^x - 3^y} = \sqrt{3^x} - \sqrt{3^y}. \end{cases}$
3. Среди всех решений уравнения $\sin x - \cos x = \cos ax$, где $a$ — произвольное вещественное число, найдите наибольшее отрицательное.
4. Изобразите на координатной плоскости множество точек, удовлетворяющих уравнению $(x + |x|)^2 + (|y| - y)^2 = 9$.
5. Вершины острых углов прямоугольного треугольника с катетами 3 и 4 лежат на полуокружности ,а меньший катет лежит на диаметре полуокружности. Вычислите длины дуг, на которые полуокружность разбивается гипотенузой треугольника.

**Санкт-Петербургский государственный университет, 1992 год**
экономический факультет,
биолого-почвенный факультет

## Вариант 1

1. Корни уравнения $x^3 - 6x^2 + 3x + a = 0$ при некотором $a$ образуют арифметическую прогрессию. Найдите эту прогрессию.
2. Решите систему уравнений $\begin{cases} \lg(a+b) = \lg a + \lg b, \\ (a+b)\sin\pi = \sin\pi a + \sin\pi b. \end{cases}$
3. а) Решите уравнение $\dfrac{\sin x - \sqrt{\sin x}}{\cos x - \sqrt{\cos x}} = 1$ (МЭО).

   б) Решите уравнение $\sqrt{1 - \sin 2x} - \sin x = 0$ (все остальные специальности).
4. а) Постройте график функции $f(x) = x^2 - |x - x^2|$ (биология, политэкономия).

   б) Найдите все значения параметра $a$, при которых неравенство $3 - |x - a| > x^2$ имеет хотя бы одно отрицательное решение (все остальные специальности).
5. Вершины куба с ребром 1 являются центрами шаров одинакового радиуса. Объем части куба, расположенной вне шаров, равен $\dfrac{1}{2}$. Какая часть ребра куба лежит вне шаров?

## Вариант 2

1. Корни уравнения $x^3 + 3x^2 + ax - 8 = 0$ при некотором $a$ образуют арифметическую прогрессию. Найдите эту прогрессию.
2. Решите систему уравнений $\begin{cases} \lg(a-b) = \lg a - \lg b, \\ (a-b)\sin\pi = \sin\pi a - \sin\pi b. \end{cases}$
3. а) Решите уравнение $\dfrac{\sqrt{\cos x} - \cos x}{\sqrt{\sin x} - \sin x} = 1$ (МЭО).

   б) Решите уравнение $\sqrt{1 - \sin 2x} + \cos x = 0$ (все остальные специальности).
4. а) Постройте график функции $f(x) = x^2 + |x + x^2|$ (биология, политэкономия).

   б) Найдите все значения параметра $a$, при которых неравенство $2 > |x + a| + x^2$ имеет хотя бы одно положительное решение (все остальные специальности).
5. Дан куб с ребром 1. Вычислите площадь полной поверхности тела, получающегося после удаления шаров радиуса $\dfrac{1}{3}$ с центрами в вершинах куба.

**Санкт-Петербургский государственный университет, 1992 год**
физический факультет,
геологический факультет,
факультет географии и геоэкологии

## Вариант 1

1. Постройте график функции $y = 2\lg|x| - |2 + \lg x^2|$.
2. Решите уравнение $\sqrt{\cos x - \frac{1}{2}} = \sqrt{\sin x - \frac{1}{2}}$.
3. Решите неравенство $\frac{1 - \log_4 x}{1 + \log_2 x} \le \frac{1}{2}$.
4. Около окружности радиуса $R$ описана прямоугольная трапеция площади $S$. Вычислите острый угол трапеции.
5. Диаметр шара совпадает с высотой конуса и объема конуса и шара равны. Вычислите отношение длинны линии пересечения поверхности шара и боковой поверхности конуса к длине окружности основания конуса.

## Вариант 2

1. Постройте график функции $y = 4\log_2|x| - |4 - \log_2 x^4|$.
2. Решите уравнение $\sqrt{\frac{1}{2} + \cos x} = \sqrt{\frac{1}{2} + \sin x}$.
3. Решите неравенство $\frac{1 + \log_3 x}{1 - \log_9 x} \ge 4$.
4. Дан периметр $p$ прямоугольной трапеции, описанной около окружности радиуса $R$.. Вычислите острый угол трапеции.
5. Диаметр шара совпадает с высотой правильной четырехугольной пирамиды. Объемы шара и пирамиды равны. Вычислите отношение площади сечения пирамиды плоскостью, содержащей точки пересечения ее боковых ребер с поверхностью шара, к площади основания пирамиды.

**Санкт-Петербургский государственный университет, 1992 год**
факультет социологии

## Вариант 1

1. Футбольное поле прямоугольной формы имеет площадь 0,64 га при ширине поля, лежащей в пределах от 50 до 55 метров. При каких размерах поля его диагональ будет наибольшей?
2. Изобразите на координатной плоскости множество точек, удовлетворяющих неравенству $\log_{2-|x|}(x^2+y^2) \geq \log_{2-|x|}5$.
3. Решите систему уравнений $\begin{cases} \sin^2 x + \cos^2 y = 1, \\ x^2 + y^2 = \dfrac{9}{16}\pi^2. \end{cases}$
4. Решите неравенство $\log_2 x \leq \dfrac{2}{\log_2 x - 1}$.
5. В прямоугольном треугольнике даны две неперпендикулярные друг другу высоты $a$ и $b$ ($a < b$). Вычислите радиус описанной около треугольника окружности.

## Вариант 2

1. Вокруг футбольного поля прямоугольной формы площадью 0,64 га идет круговая дорожка. Длина футбольного поля лежит в пределах от 100 до 110 метров. При каких размерах поля длина дорожки имеет наименьшее возможное значение?
2. Изобразите на координатной плоскости множество точек, удовлетворяющих неравенству $\log_{|x|-1}(x^2+y^2) \geq \log_{|x|-1}5$.
3. Решите систему уравнений $\begin{cases} \cos^2 x + \sin^2 y = 1, \\ x^2 + y^2 = \dfrac{16}{25}\pi^2. \end{cases}$
4. Решите неравенство $\dfrac{\lg^2 x - 3\lg x + 3}{\lg x - 1} < 1$.
5. В прямоугольном треугольнике даны две перпендикулярные друг другу высоты $a$ и $b$. Вычислите радиус вписанной в треугольник окружности.

**Санкт-Петербургский государственный университет, 1992 год**
химический факультет

## Вариант 1

1. Изобразите на координатной плоскости множество точек, удовлетворяющих неравенству $y - x = |x^2 - y^2|$.
2. Решите неравенство $\dfrac{4^x + 2x - 4}{x-1} \le 2$.
3. Решите уравнение $\sqrt{\dfrac{\pi}{6} - \sin x} = \sqrt{\dfrac{\pi}{6} + \cos x}$.
4. В трапеции основания равны $a$ и $b$, а одна из диагоналей перпендикулярна основаниям. Найдите расстояние между центрами окружностей, описанных около треугольников, на которые трапеция разбивается этой диагональю.
5. Периметр осевого сечения конуса равен $p$. Найдите угол при вершине осевого сечения, для которого объем конуса максимален.

## Вариант 2

1. Изобразите на координатной плоскости множество точек, удовлетворяющих уравнению $x + y = |y^2 - x^2|$.
2. Решите неравенство $\log_{2x+3} x^2 < 1$.
3. Решите уравнение $\sqrt{\dfrac{1}{2} + \sin\dfrac{\pi}{3}x} = \sqrt{\dfrac{1}{2} + \cos\dfrac{\pi}{3}x}$.
4. В прямоугольной трапеции один из углов равен $45°$, а высота и меньшее основание равны $a$. Найдите расстояние между центрами окружностей, описанных около треугольников, на которые трапеция разбивается меньшей диагональю.
5. Объем конуса равен $V$. Найдите отношение радиуса основания конуса к его высоте, при котором площадь боковой поверхности конуса наименьшая.

## Ответы к вариантам

Математико-механический факультет,
факультет прикладной математики – процессов управления

### Ответы к варианту 1

1. Ответ: $4$ км/ч, $5$ км/ч, $6$ км/ч.
2. Ответ: $\left\{(-1)^k \arcsin\frac{5}{8} + \pi k : k \in \mathbb{Z}\right\}$.
3. Ответ: $\left(\frac{10}{17}; +\infty\right)$.
4. Ответ: $2\pi + \frac{84}{25} + 4\,\mathrm{arctg}\,\frac{3}{4}$; $2\pi - \frac{84}{25} - 4\,\mathrm{arctg}\,\frac{3}{4}$.
5. Ответ: $h = r = \frac{\sqrt[3]{\pi V}}{\pi}$.

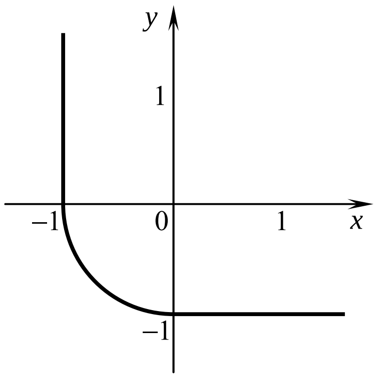
### Ответы к варианту 2

1. Ответ: 3, 5, 7 или $\frac{15}{\sqrt{7}}, \frac{16}{\sqrt{7}}, \frac{17}{\sqrt{7}}$.
2. Ответ: $\left\{\mathrm{arctg}\,\frac{2}{3} + \pi k : k \in \mathbb{Z}\right\}$.
3. Ответ: $\left(-\infty; \frac{3}{14}\right)$.
4. Ответ: $\frac{3\pi}{2} - 3\,\mathrm{arctg}\,\frac{4}{3}$; $\frac{3\pi}{2} + 3\,\mathrm{arctg}\,\frac{4}{3}$.
5. Ответ: $\frac{\pi p^3}{216}$.

Факультет психологии,
филологический факультет
(отделение математической лингвистики)

**Ответы к варианту 1**

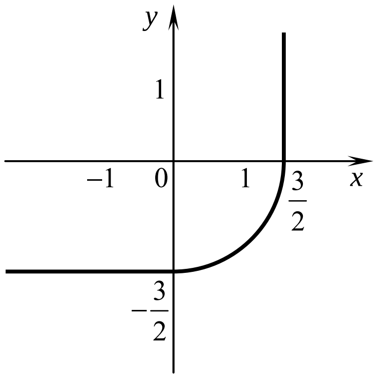
1. Ответ: $3$ км/ч, $4$ км/ч.
2. Ответ: $\{(1;1)\}$.
3. Ответ: $\left\{\frac{\pi}{2}\right\}$.
4. Ответ: см. рисунок.




5. Ответ: $\frac{25}{4}\operatorname{arctg}\frac{3}{4}$; $\frac{25\pi}{8}-\frac{25}{4}\operatorname{arctg}\frac{3}{4}$.

**Ответы к варианту 2**

1. Ответ: $1$ км/ч, $\sqrt{2}$ км/ч.
2. Ответ: $\{(1;1)\}$.
3. Ответ: $\left\{-\frac{\pi}{2}\right\}$.
4. Ответ: см. рисунок.




5. Ответ: $\frac{25}{3}\operatorname{arctg}\frac{4}{3}$; $\frac{25\pi}{6}-\frac{25}{3}\operatorname{arctg}\frac{4}{3}$.

Экономический факультет,
биолого-почвенный факультет

## Ответы к варианту 1

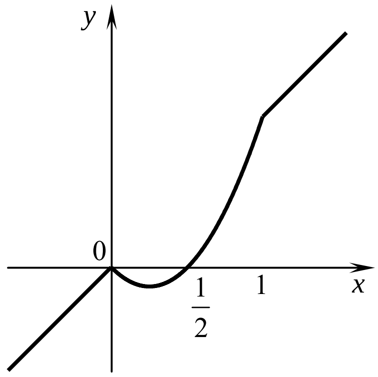
1. Ответ: $\{(-1;\,2;\,5);\,(5;\,2;\,-1)\}$.

2. Ответ: $\left\{\left(2m;\,\dfrac{2m}{2m-1}\right);\,\left(\dfrac{2m-1}{2m};\,2m\right);\,\left(k-t;\,\dfrac{2k}{k-t}\right);\,\left(k+t;\,\dfrac{2k}{k+t}\right):t=\sqrt{k^2-2k},\ m\in\mathbb{N},\ k\in\mathbb{N}\setminus\{1\}\right\}$.

3. а) Ответ: $\left\{\dfrac{\pi}{4}+2\pi k:k\in\mathbb{Z}\right\}$.

   б) Ответ: $\left\{\operatorname{arctg}\dfrac{1}{2}+2\pi k;\,\dfrac{\pi}{2}+2\pi k:k\in\mathbb{Z}\right\}$.

4. а) Ответ: $f(x)=\begin{cases}x,\ x\in\mathbb{R}\setminus[0;\,1],\\ 2x^2-x,\ 0\le x\le 1\end{cases}$ (см. рисунок).




   б) Ответ: $\left(-\dfrac{13}{4};\,3\right)$.

5. Ответ: $1-\dfrac{\sqrt[3]{3\pi}}{\pi}$.

## Ответы к варианту 2

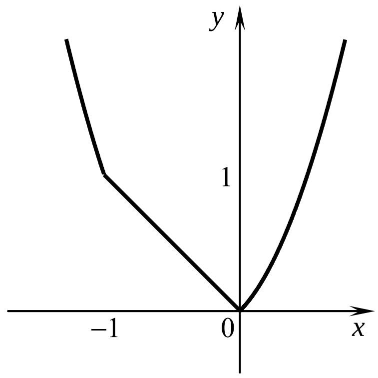
1. Ответ: $\{(2;\,-1;\,-4);\,(-4;\,-1;\,2)\}$.

2. Ответ: $\left\{\left(\dfrac{4k^2}{2k-1};\,\dfrac{2k}{2k-1}\right);\,\left(\dfrac{4k^2}{2k-1};\,2k\right);\,(2m;\,m-t);\,(2m;\,m+t):t=\sqrt{m^2-2m},\ m\in\mathbb{N}\setminus\{1\},\ k\in\mathbb{N}\right\}$.

3. а) Ответ: $\left\{\dfrac{\pi}{4}+2\pi k:k\in\mathbb{Z}\right\}$.

   б) Ответ: $\{\pi+2\pi k;\,\pi+\operatorname{arctg}2+2\pi k:k\in\mathbb{Z}\}$.

4. а) Ответ: $f(x)=\begin{cases}2x^2+x,\ x\in\mathbb{R}\setminus[-1;\,0],\\ -x,\ -1\le x\le 0\end{cases}$ (см. рисунок).



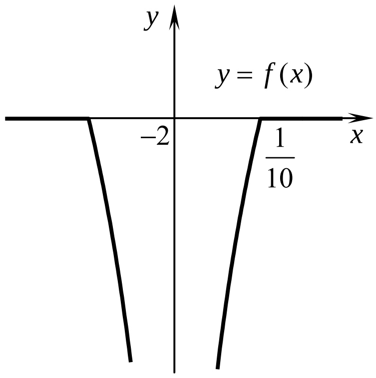

   б) Ответ: $\left(-\dfrac{9}{4};\,2\right)$.

5. Ответ: $6-\dfrac{2\pi}{9}$.

Физический факультет,
геологический факультет,
факультет географии и геоэкологии

## Ответы к варианту 1

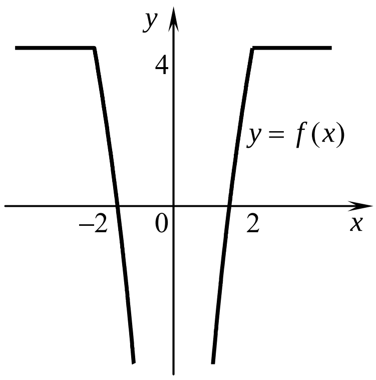
1. Ответ: см. рисунок.




2. Ответ: $\left\{\dfrac{\pi}{4}+2\pi k : k\in\mathbb{Z}\right\}$.
3. Ответ: $\left(0;\, \dfrac{1}{2}\right)\cup[2;\,+\infty)$.
4. Ответ: $\arcsin\left(\dfrac{2r^2}{3-2r^2}\right)$.
5. Ответ: $\dfrac{2}{3}$.

## Ответы к варианту 2

1. Ответ: см. рисунок.

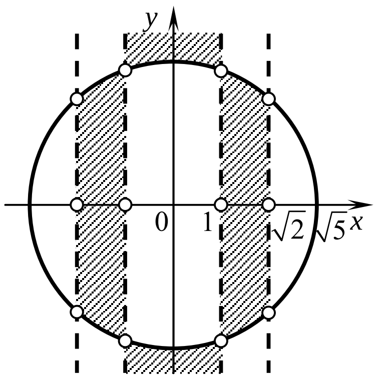



2. Ответ: $\left\{\dfrac{\pi}{4}+2\pi k : k\in\mathbb{Z}\right\}$.
3. Ответ: $[3;\, 9)$.
4. Ответ: $\arcsin\left(\dfrac{4R}{p-4R}\right)$.
5. Ответ: $\left(\dfrac{\pi}{4}+1\right)^{-2}$.

Факультет социологии

## Ответы к варианту 1

1. Ответ: 50 м, 128 м.
2. Ответ: см. рисунок.




3. Ответ: $\left\{\left(\frac{3\pi}{4\sqrt{2}};\frac{3\pi}{4\sqrt{2}}\right);\ \left(\frac{3\pi}{4\sqrt{2}};-\frac{3\pi}{4\sqrt{2}}\right);\left(-\frac{3\pi}{4\sqrt{2}};\frac{3\pi}{4\sqrt{2}}\right);\left(-\frac{3\pi}{4\sqrt{2}};-\frac{3\pi}{4\sqrt{2}}\right);\left(\frac{\pi}{2}+\frac{\sqrt{2}\pi}{8};\frac{\pi}{2}-\frac{\sqrt{2}\pi}{8}\right);\right.$

$\left(-\frac{\pi}{2}-\frac{\sqrt{2}\pi}{8};\frac{\pi}{2}-\frac{\sqrt{2}\pi}{8}\right);\ \left(\frac{\pi}{2}+\frac{\sqrt{2}\pi}{8};-\frac{\pi}{2}+\frac{\sqrt{2}\pi}{8}\right);\left(-\frac{\pi}{2}-\frac{\sqrt{2}\pi}{8};-\frac{\pi}{2}+\frac{\sqrt{2}\pi}{8}\right);\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\sqrt{2}\pi}{8};\frac{\pi}{2}+\frac{\sqrt{2}\pi}{8}\right);$

$\left.\left(-\frac{\pi}{2}+\frac{\sqrt{2}\pi}{8};\frac{\pi}{2}+\frac{\sqrt{2}\pi}{8}\right);\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\sqrt{2}\pi}{8};-\frac{\pi}{2}-\frac{\sqrt{2}\pi}{8}\right);\left(-\frac{\pi}{2}+\frac{\sqrt{2}\pi}{8};-\frac{\pi}{2}-\frac{\sqrt{2}\pi}{8}\right)\right\}$

4. Ответ: $\left(0;\frac{1}{2}\right]\cup(2;4]$.
5. Ответ: $\frac{b^2}{2\sqrt{b^2-a^2}}$.

## Ответы к варианту 2

1. Ответ: 64 м, 100 м.
2. Ответ: .
3. Ответ: $\left\{\left(\frac{4\pi}{5\sqrt{2}};\frac{4\pi}{5\sqrt{2}}\right);\ \left(-\frac{4\pi}{5\sqrt{2}};\frac{4\pi}{5\sqrt{2}}\right);\left(\frac{4\pi}{5\sqrt{2}};-\frac{4\pi}{5\sqrt{2}}\right);\left(-\frac{4\pi}{5\sqrt{2}};-\frac{4\pi}{5\sqrt{2}}\right);\left(\frac{\pi}{2}+\frac{\sqrt{7}\pi}{10};\frac{\pi}{2}-\frac{\sqrt{7}\pi}{10}\right);\right.$

$\left(-\frac{\pi}{2}-\frac{\sqrt{7}\pi}{10};\frac{\pi}{2}-\frac{\sqrt{7}\pi}{10}\right);\ \left(\frac{\pi}{2}+\frac{\sqrt{7}\pi}{10};-\frac{\pi}{2}+\frac{\sqrt{7}\pi}{10}\right);\left(-\frac{\pi}{2}-\frac{\sqrt{7}\pi}{10};-\frac{\pi}{2}+\frac{\sqrt{7}\pi}{10}\right);\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\sqrt{7}\pi}{10};\frac{\pi}{2}+\frac{\sqrt{7}\pi}{10}\right);$

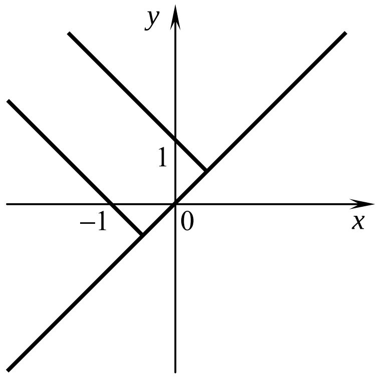
$\left.\left(-\frac{\pi}{2}+\frac{\sqrt{7}\pi}{10};\frac{\pi}{2}+\frac{\sqrt{7}\pi}{10}\right);\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\sqrt{7}\pi}{10};-\frac{\pi}{2}-\frac{\sqrt{7}\pi}{10}\right);\left(-\frac{\pi}{2}+\frac{\sqrt{7}\pi}{10};-\frac{\pi}{2}-\frac{\sqrt{7}\pi}{10}\right)\right\}$.

4. Ответ: $(0;10)$.
5. Ответ: $\frac{ab}{a+b+\sqrt{a^2+b^2}}$.

Химический факультет

## Ответы к варианту 1

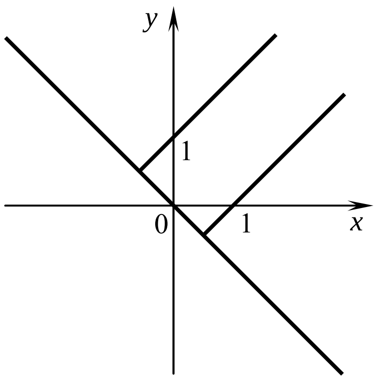
1. Ответ: см. рисунок.




2. Ответ: $\left[\frac{1}{2}; 1\right)$.
3. Ответ: $\left\{-\frac{\pi}{4} + 2\pi k : k \in \mathbb{Z}\right\}$.
4. Ответ: $\frac{a+b}{2}$.
5. Ответ: $2\,\mathrm{arctg}\frac{2}{\sqrt{5}}$.

## Ответы к варианту 2

1. Ответ: см. рисунок.




2. Ответ: $\left(-\frac{3}{2}; -1\right) \cup (-1; 0) \cup (0; 3)$.
3. Ответ: $\left\{\frac{3}{4} + 6k : k \in \mathbb{Z}\right\}$.
4. Ответ: $\frac{a}{\sqrt{2}}$.
5. Ответ: $\frac{1}{\sqrt{2}}$.