

Санкт-Петербургский государственный университет, 1993 год
математико-механический факультет,
факультет прикладной математики – процессов управления

Вариант 1

1. Числа $\frac{1}{17}$, $\frac{1}{15}$, $\frac{1}{13}$ являются членами некоторой арифметической прогрессии с возрастающими номерами. Каково наибольшее возможное значение разности такой прогрессии?
2. При каких значениях параметра a уравнение $2\lg(x+1) = \lg(ax)$ имеет единственное решение?
3. Решите уравнение $\sin 2x = \sqrt{\frac{5}{4} - 2\sin^2 x}$.
4. Дана равнобедренная описанная трапеция $ABCD$, в которой обе диагонали равны основанию AD . Найдите углы при основании.
5. Дана прямая призма $ABCA'B'C'$, стороны основания которой $AB = BC = 1$, $AC = \sqrt{3}$. В каком отношении объем вписанного в призму цилиндра делится плоскостью $AB'C'$?

Вариант 2

1. Числа $\frac{1}{21}$, $\frac{1}{19}$, $\frac{1}{17}$ являются членами некоторой арифметической прогрессии с возрастающими номерами. Каково наибольшее возможное значение разности такой прогрессии?
2. При каких значениях параметра b уравнение $2\lg(1-x) = \lg(bx)$ имеет единственное решение?
3. Решите уравнение $\sin 2x + \sqrt{2 - 5\sin^2 x} = 0$.
4. В описанной равнобедренной трапеции $ABCD$ с основанием AD диагонали перпендикулярны боковым сторонам. Найдите угол между диагоналями.
5. Дана прямая призма $ABCA'B'C'$, стороны основания которой $AB = BC = \sqrt{2}$, $AC = 2$. В каком отношении объем вписанного в призму цилиндра делится плоскостью $A'BC'$?

Санкт-Петербургский государственный университет, 1993 год
филологический факультет
(отделение прикладной лингвистики)

Вариант 1

1. Из пункта A в пункт B выехал грузовик. Через 1 час из пункта A в пункт B выехал легковой автомобиль. Через 2 часа после выезда он догнал грузовик и прибыл в пункт B на 3 часа раньше грузовика. Сколько времени грузовик ехал от A до B ?
2. Решите уравнение $\log_{3x-5} 2 = \log_{x-1} \sqrt{2}$.
3. Найдите на отрезке $[0; 3]$ максимальное число x , удовлетворяющее уравнению $\cos^2 3x + \cos^2 5x = \sin^2 2x$.
4. Решите уравнение $\sqrt{x^2 + 6x + 2} - \sqrt{x^2 + x + 1} = 5x + 1$.
5. Дана прямая призма $ABCA'B'C'$, стороны основания которой $AB = BC = 1$, $AC = \sqrt{3}$. В каком отношении объем вписанного в призму цилиндра делится плоскостью $AB'C$?

Вариант 2

1. Из пункта A в пункт B выехал велосипедист. Спустя 3 часа из пункта A в пункт B отправился мотоциклист. После обгона велосипедиста он за 1 час достиг пункта B . При этом он опередил велосипедиста на 1,5 часа. Сколько времени ехал велосипедист?
2. Решите уравнение $\log_{x+3} \sqrt{3} = \log_{3x+7} 3$.
3. Найдите на отрезке $[1; 4]$ минимальное число x , удовлетворяющее уравнению $\sin^2 2x + \sin^2 3x = \sin^2 5x$.
4. Решите уравнение $\sqrt{x^2 + 5x + 2} - \sqrt{x^2 + x + 1} = 4x + 1$.
5. Дана прямая призма $ABCA'B'C'$, стороны основания которой $AB = BC = \sqrt{2}$, $AC = 2$. В каком отношении объем вписанного в призму цилиндра делится плоскостью $A'BC'$?

Санкт-Петербургский государственный университет, 1993 год
биолого-почвенный факультет,
экономический факультет
(отделения ЭКИБ, ЭИР, ПЭК)

Вариант 1

1. Изобразите на координатной плоскости Oxy множество точек, координаты которых удовлетворяют системе
$$\begin{cases} x^2 + y^2 = x + y, \\ x + y \leq 1. \end{cases}$$
2. При каких значениях параметра a уравнение $\lg(x^2 + 6x + 8) = \lg(a - 3x)$ имеет единственное решение?
3. Решите уравнение
$$\frac{1 + \operatorname{tg} \alpha}{\cos 2\alpha} = \frac{1 - \operatorname{tg} \alpha}{1 - \sin 2\alpha}.$$
4. Точка X делит сторону AB треугольника ABC в отношении 1:2. Точка Y лежит на стороне AC , и отрезок BY делится отрезком XC в отношении 5:2. В каком отношении точка Y делит сторону AC ?
5. В основании пирамиды лежит равносторонний треугольник со стороной a . Одна из боковых граней представляет собой такой же треугольник, при этом она перпендикулярна плоскости основания. Найдите радиус шара, описанного вокруг пирамиды.

Вариант 2

1. Изобразите на координатной плоскости Oxy множество точек, координаты которых удовлетворяют системе
$$\begin{cases} x^2 - y^2 = x - y, \\ x + y \geq 1. \end{cases}$$
2. При каких значениях параметра a уравнение $\lg(x^2 - 4x + 3) = \lg(3x + a)$ имеет единственное решение?
3. Решите уравнение
$$\frac{1 - \operatorname{tg} \alpha}{\cos 2\alpha} = \frac{1 + \operatorname{tg} \alpha}{1 + \sin 2\alpha}.$$
4. Точка P делит сторону BC треугольника ABC в соотношении 2:3. Точка Q делит отрезок AP в отношении 4:3. В каком отношении прямая BQ делит сторону AC ?
5. В основании пирамиды лежит равнобедренный треугольник с катетом a . Одна из боковых граней представляет собой такой же треугольник, при этом она перпендикулярна плоскости основания. Две другие грани также являются прямоугольными треугольниками. Найдите радиус шара, описанного вокруг пирамиды.

Санкт-Петербургский государственный университет, 1993 год
экономический факультет
(отделения МЭО, ПЭК, ЭУСКС),
школа менеджмента

Вариант 1

1. Нарисуйте график функции $f(x) = \left| x + \sin^2 \frac{\pi x}{2} \right| + \left| x + \cos^2 \frac{\pi x}{2} \right|$.
2. При каких значениях параметра a уравнение $\sqrt{x^2 + 6x + 8} = \sqrt{a - 3x}$ имеет единственное решение на промежутке $(0; +\infty)$?
3. Решите уравнение $\log_{7x-5} 4 = \log_{x-1} \sqrt{2}$.
4. Точка X делит сторону AB треугольника ABC в отношении 1:2. Точка Y лежит на стороне AC , и отрезок BY делится отрезком XC в отношении 5:2. В каком отношении точка Y делит сторону AC ?
5. В основании пирамиды лежит равносторонний треугольник со стороной a . Одна из боковых граней представляет собой такой же треугольник, при этом она перпендикулярна плоскости основания. Найдите радиус шара, описанного вокруг пирамиды.

Вариант 2

1. Нарисуйте график функции $f(x) = \left| \sin^2 \frac{\pi x}{2} - x \right| + \left| \cos^2 \frac{\pi x}{2} - x \right|$.
2. При каких значениях параметра a уравнение $\sqrt{x^2 - 4x + 3} = \sqrt{3x + a}$ имеет единственное решение на промежутке $(0; +\infty)$?
3. Решите уравнение $\log_{1-x} \sqrt{3} = \log_{10-6x} 9$.
4. Точка P делит сторону BC треугольника ABC в соотношении 2:3. Точка Q делит отрезок AP в отношении 4:3. В каком отношении прямая BQ делит сторону AC ?
5. В основании пирамиды лежит равнобедренный треугольник с катетом a . Одна из боковых граней представляет собой такой же треугольник, при этом она перпендикулярна плоскости основания. Две другие грани также являются прямоугольными треугольниками. Найдите радиус шара, описанного вокруг пирамиды.

Санкт-Петербургский государственный университет, 1993 год
физический факультет,
геологический факультет,
факультет географии и геоэкологии

Вариант 1

1. Постройте график функции $f(x) = x^2 - 4|x| + 3$.
2. Решите уравнение $\log_3 x + \log_x 9 = 3$.
3. Решите уравнение $3 \operatorname{tg}^2 x - 8 \cos^2 x + 1 = 0$.
4. Окружность с радиусом 13 см касается двух смежных сторон квадрата со стороной 18 см. На какие отрезки делит окружность сторону квадрата?
5. а) Вершина конуса находится в центре шара, а основание касается шара. Объемы у конуса и шара равны. Вычислите отношение площади поверхности шара к площади боковой поверхности конуса, расположенной внутри шара (физический факультет, факультет географии и геоэкологии).
б) Решите неравенство $x^3 - x > x - x^2$ (геологический факультет).

Вариант 2

1. Постройте график функции $f(x) = 2|x| - x^2 - 1$.
2. Решите уравнение $\log_2 x + \log_x 16 = 4$.
3. Решите уравнение $2 \operatorname{tg}^2 x + 4 \cos^2 x = 7$.
4. Окружность с радиусом 13 см касается двух смежных сторон прямоугольника длиной 18 см и 30 см. На какие она отрезки делит большую из оставшихся сторон прямоугольника?
5. а) Вершина конуса находится в центре шара, а основание касается шара. Площадь полной поверхности конуса равна площади поверхности шара. Найдите угол между высотой конуса и его образующей (физический факультет, факультет географии и геоэкологии).
б) Решите неравенство $x^3 - x > x + x^2$ (геологический факультет).

Санкт-Петербургский государственный университет, 1993 год
факультет социологии

Вариант 1

1. Бригада маляров начала красить цех. Через 5 дней вторая бригада начала красить другой такой же цех и закончила покраску одновременно с первой. Если бы они стали красить первый цех вместе, то им понадобилось бы на это 6 дней. Сколько времени первая бригада красила цех?
2. Решите неравенство $\sqrt{6-10x} > 2x$.
3. Решите уравнение $\frac{1}{1+\sin^2 x} + \frac{1}{1+\cos^2 x} = \frac{48}{35}$.
4. Решите уравнение $\log_x 2 \cdot \log_{x^2} 7 = \log_x 5$.
5. В правильной четырехугольной пирамиде боковые грани образуют с основанием угол 45° . Найдите угол между смежными боковыми гранями пирамиды.

Вариант 2

1. Бассейн наполняется из двух труб за 7,5 часов. Если открыть только первую трубу, то бассейн наполнится на 8 часов быстрее, чем если открыть только вторую трубу. Сколько времени будет наполняться бассейн второй трубой?
2. Решите неравенство $2x + \sqrt{10x+6} > 0$.
3. Решите уравнение $\frac{1}{1-\sin^2 2x} + \frac{1}{1-\cos^2 2x} = \frac{16}{3}$.
4. Решите уравнение $\log_x 5 \cdot \log_{x^2} 2 = \log_x 7$.
5. Боковые грани правильной четырехугольной пирамиды представляют собой правильные треугольники. Найдите угол между смежными боковыми гранями пирамиды.

Вариант 1

1. Изобразите на координатной плоскости Oxy множество точек, координаты которых удовлетворяют неравенству $x \geq |x^3 + xy^2|$.
2. Решите уравнение $\lg^2(2x+3) = \lg^2(3x+2)$.
3. Решите уравнение $(x + \sqrt{3})\sqrt{x^2 - \frac{10}{\sqrt{3}}x + 5} = (x + \sqrt{5})\sqrt{x^2 - \frac{6}{\sqrt{5}}x + 3}$.
4. Точки P , Q и R делят стороны AB , BC и CA треугольника ABC в отношениях 2:3, 2:1, 1:1 соответственно. Какую часть площади всего треугольника ABC составляет площадь треугольника PQR ?
5. Шар касается основания и трех боковых ребер правильного тетраэдра единичного объема. Найдите радиус шара.

Вариант 2

1. Изобразите на координатной плоскости Oxy множество точек, координаты которых удовлетворяют неравенству $y \geq |y^3 + x^2y|$.
2. Решите уравнение $\lg^2(4x-5) = \lg^2(3x-1)$.
3. Решите уравнение $(x + \sqrt{2})\sqrt{x^2 - \frac{14}{\sqrt{2}}x + 7} = (x + \sqrt{7})\sqrt{x^2 - \frac{4}{\sqrt{7}}x + 2}$.
4. Точки X , Y и Z делят стороны AB , BC и CA треугольника ABC в отношениях 1:1, 3:1, 2:3 соответственно. Какую часть площади всего треугольника ABC составляет площадь треугольника XYZ ?
5. Шар касается основания и трех боковых ребер правильной треугольной пирамиды, боковые грани которой — прямоугольные треугольники. Найдите радиус шара, если известно, что объем пирамиды равен единице.

Ответы к вариантам

Математико-механический факультет,
факультет прикладной математики – процессов управления

Ответы к варианту 1

1. Ответ: $\frac{2}{3315}$.
2. Ответ: $(-\infty; 0) \cup \{4\}$.
3. Ответ: $\left\{ \frac{\pi}{6} + \pi k : k \in \mathbb{Z} \right\}$.
4. Ответ: $\arccos\left(\frac{\sqrt{3}-1}{2}\right)$.
5. Ответ: $\sqrt{3} : 2$.

Ответы к варианту 2

1. Ответ: $\frac{2}{6783}$.
2. Ответ: $(0; +\infty) \cup \{-4\}$.
3. Ответ: $\left\{ -\frac{\pi}{6} + \pi k : k \in \mathbb{Z} \right\}$.
4. Ответ: $\arccos(\sqrt{5}-2)$.
5. Ответ: $\sqrt{2} : 1$.

Ответы к варианту 1

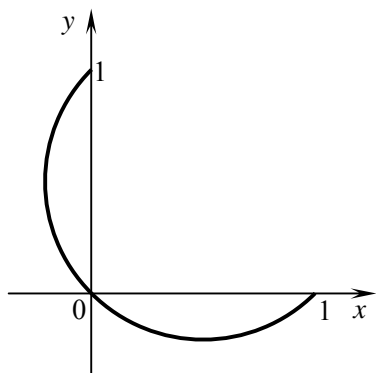
1. Ответ: 12.
2. Ответ: {3}.
3. Ответ: $\left\{\frac{9\pi}{10}\right\}$.
4. Ответ: $\left\{-\frac{1}{5}; \frac{2-2\sqrt{22}}{21}\right\}$.
5. Ответ: $\sqrt{3}:2$.

Ответы к варианту 2

1. Ответ: 7,5.
2. Ответ: {-1}.
3. Ответ: $\left\{\frac{\pi}{3}\right\}$.
4. Ответ: $\left\{-\frac{1}{4}; \frac{1-\sqrt{13}}{6}\right\}$.
5. Ответ: $\sqrt{2}:1$.

Ответы к варианту 1

1. Ответ: см. рисунок.



2. Ответ: $[-12; -6] \cup \left\{-\frac{49}{4}\right\}$.

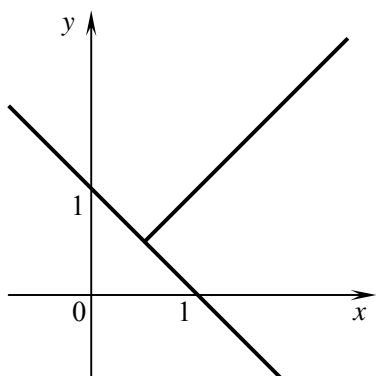
3. Ответ: $\mathbb{R} \setminus \left\{\frac{\pi}{2} + \pi k; \frac{\pi}{4} + \frac{\pi k}{2} : k \in \mathbb{Z}\right\}$.

4. Ответ: 1:4.

5. Ответ: $\frac{a\sqrt{15}}{6}$.

Ответы к варианту 2

1. Ответ: см. рисунок.



2. Ответ: $[-9; -3] \cup \left\{-\frac{37}{4}\right\}$.

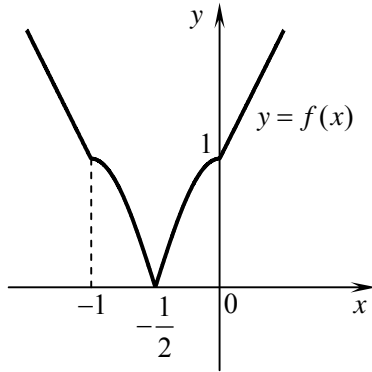
3. Ответ: $\mathbb{R} \setminus \left\{\frac{\pi}{2} + \pi k; \frac{\pi}{4} + \frac{\pi k}{2} : k \in \mathbb{Z}\right\}$.

4. Ответ: 8:15.

5. Ответ: $\frac{a\sqrt{3}}{2}$.

Ответы к варианту 1

1. Ответ: см. рисунок.



2. Ответ: $(-12; -6) \cup [8; +\infty) \cup \left\{-\frac{49}{4}\right\}$.

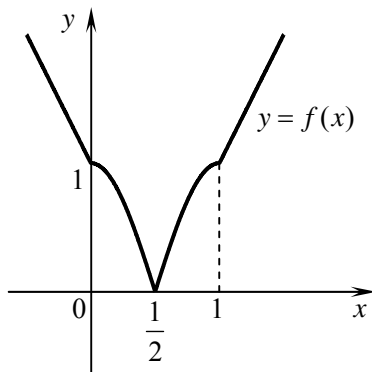
3. Ответ: $\{3\}$.

4. Ответ: 1:4.

5. Ответ: $\frac{a\sqrt{15}}{6}$.

Ответы к варианту 2

1. Ответ: см. рисунок.



2. Ответ: $(-9; -3) \cup [3; +\infty) \cup \left\{-\frac{37}{4}\right\}$.

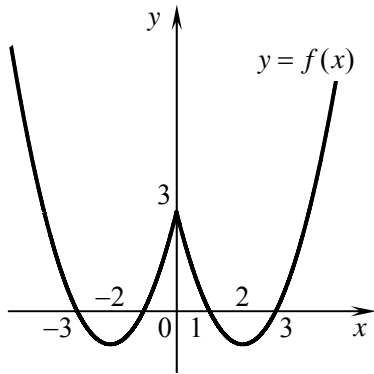
3. Ответ: $\{-1\}$.

4. Ответ: 8:15.

5. Ответ: $\frac{a\sqrt{3}}{2}$.

Ответы к варианту 1

1. Ответ: см. рисунок.



2. Ответ: $\{3; 9\}$.

3. Ответ: $\left\{\frac{\pi}{4} + \frac{\pi k}{2} : k \in \mathbb{Z}\right\}$.

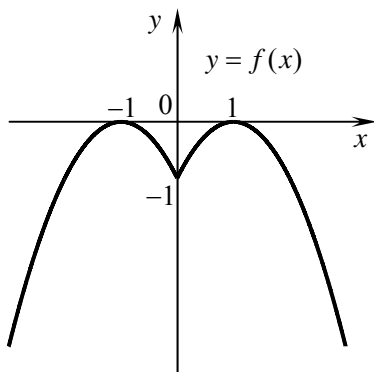
4. Ответ: 1; 17.

5. а) Ответ: $2\sqrt{5}$.

б) Ответ: $(-2; 0) \cup (1; +\infty)$.

Ответы к варианту 2

1. Ответ: см. рисунок.



2. Ответ: $\{4\}$.

3. Ответ: $\left\{-\frac{\pi}{3} + \pi k; \frac{\pi}{3} + \pi k : k \in \mathbb{Z}\right\}$.

4. Ответ: 1; 24; 5.

5. а) Ответ: $\operatorname{arctg} \frac{4}{3}$.

б) Ответ: $(-1; 0) \cup (2; +\infty)$.

Ответы к варианту 1

1. Ответ: 15.

2. Ответ: $\left(-\infty; \frac{1}{2}\right)$.

3. Ответ: $\left\{-\frac{\pi}{6} + \frac{\pi k}{2}; \frac{\pi}{6} + \frac{\pi k}{2} : k \in \mathbb{Z}\right\}$.

4. Ответ: $\left\{2^{\frac{\log_5 7}{2}}\right\}$.

5. Ответ: 120° .

Ответы к варианту 2

1. Ответ: 20.

2. Ответ: $\left(-\frac{1}{2}; +\infty\right)$.

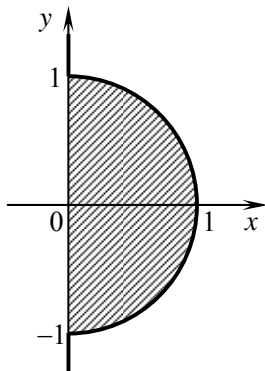
3. Ответ: $\left\{-\frac{\pi}{12} + \frac{\pi k}{4}; \frac{\pi}{12} + \frac{\pi k}{4} : k \in \mathbb{Z}\right\}$.

4. Ответ: $\left\{2^{\frac{\log_7 5}{2}}\right\}$.

5. Ответ: $\arccos\left(-\frac{1}{3}\right)$.

Ответы к варианту 1

1. Ответ: см. рисунок.



2. Ответ: $\left\{-\frac{1}{3}; 1\right\}$.

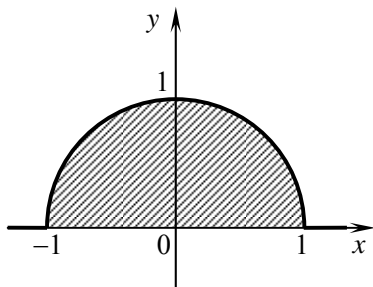
3. Ответ: $\{0\}$.

4. Ответ: $\frac{7}{30}$.

5. Ответ: $\frac{2\sqrt[3]{3}}{3+\sqrt{3}}$.

Ответы к варианту 2

1. Ответ: см. рисунок.



2. Ответ: $\left\{\frac{4}{3}; 4\right\}$.

3. Ответ: $\{0\}$.

4. Ответ: $\frac{9}{40}$.

5. Ответ: $\frac{2}{\sqrt{2}+\sqrt{3}}$.