

Санкт-Петербургский государственный университет, 1995 год
математико-механический факультет,
факультет прикладной математики – процессов управления

Вариант 1

1. Нарисуйте график функции $f(x) = \frac{1}{|\operatorname{tg} x| + \operatorname{ctg} x}$.
2. Решите неравенство $\sqrt{\log_2 x} \leq \log_2 \frac{x}{64}$.
3. Решите уравнение $\sqrt{a \sin x + \cos x} = \sqrt{a \cos x + \sin x}$.
4. Две вершины равнобедренного прямоугольного треугольника ABC лежат на окружности S . Найдите радиус окружности, если известно, что длина катета BC равна a , а длина касательной, проведенной из вершины A к окружности, равна $2a$.
5. Плоскость, проходящая через ребро основания правильной четырехугольной пирамиды, делит ее объем пополам. В каком отношении плоскость делит боковые ребра пирамиды?

Вариант 2

1. Нарисуйте график функции $f(x) = \frac{1}{\operatorname{tg} x + |\operatorname{ctg} x|}$.
2. Решите неравенство $\sqrt{\log_3 x} \geq \log_3 \frac{x}{9}$.
3. Решите уравнение $\sqrt{\sin x - a \cos x} = \sqrt{a \sin x - \cos x}$.
4. Вершины A и B квадрата $ABCD$ лежат на окружности S . Найдите диаметр окружности, если известно, что длина стороны квадрата равна b , а длина касательной, проведенной из вершины C к окружности, равна $3b$.
5. Плоскость, проходящая через ребро основания правильной четырехугольной пирамиды, делит площадь ее боковой поверхности пополам. В каком отношении плоскость делит объем пирамиды?

Санкт-Петербургский государственный университет, 1995 год
биолого-почвенный факультет

Вариант 1

1. Сколько существует четырехзначных чисел, делящихся нацело на 15, у которых сумма квадратов цифр не превосходит 26?
2. Изобразите на координатной плоскости Oxy множество точек, координаты которых удовлетворяют уравнению $\frac{|x|}{|y|} = \frac{2-y}{2-x}$.
3. Решите уравнение $\sqrt{\log_2 x} = \log_2 \frac{x}{64}$.
4. Решите уравнение $\sin^2 x + \sin x + \sqrt{\sin x} = 1 - \cos x$.
5. Две вершины равнобедренного прямоугольного треугольника ABC лежат на окружности S . Найдите радиус окружности, если известно, что длина катета BC равна a , а длина касательной, проведенной из вершины A к окружности равна $2a$.

Вариант 2

1. Сколько существует четырехзначных чисел, делящихся нацело на 45, у которых сумма квадратов цифр не превосходит 35?
2. Изобразите на координатной плоскости Oxy множество точек, координаты которых удовлетворяют уравнению $\frac{|x|}{|y|} = \frac{x-4}{4-y}$.
3. Решите уравнение $\sqrt{\log_3 x} = \log_3 \frac{x}{9}$.
4. Решите уравнение $\cos^2 x + \cos x + \sqrt{\cos x} = 1 - \sin x$.
5. Вершины A и B квадрата $ABCD$ лежат на окружности S . Найдите диаметр окружности, если известно, что длина стороны квадрата равна b , а длина касательной, проведенной из вершины C к окружности, равна $3b$.

Санкт-Петербургский государственный университет, 1995 год
филологический факультет
(отделение прикладной лингвистики),
школа менеджмента

Вариант 1

1. Сколько существует четырехзначных чисел, делящихся нацело на 15, у которых сумма квадратов цифр не превосходит 26?
2. Изобразите на координатной плоскости Oxy множество точек, координаты которых удовлетворяют уравнению $\frac{|x|}{|y|} = \frac{2-y}{2-x}$.
3. Решите неравенство $\sqrt{\log_2 x} \leq \log_2 \frac{x}{64}$.
4. Решите уравнение $\sin^2 x + \sin x + \sqrt{\sin x} = 1 - \cos x$.
5. Плоскость, проходящая через ребро основания правильной четырехугольной пирамиды, делит ее объем пополам. В каком отношении плоскость делит боковые ребра пирамиды?

Вариант 2

1. Сколько существует четырехзначных чисел, делящихся нацело на 45, у которых сумма квадратов цифр не превосходит 35?
2. Изобразите на координатной плоскости Oxy множество точек, координаты которых удовлетворяют уравнению $\frac{|x|}{|y|} = \frac{x-4}{4-y}$.
3. Решите неравенство $\sqrt{\log_3 x} \geq \log_3 \frac{x}{9}$.
4. Решите уравнение $\cos^2 x + \cos x + \sqrt{\cos x} = 1 - \sin x$.
5. Плоскость, проходящая через ребро основания правильной четырехугольной пирамиды, делит площадь ее боковой поверхности пополам. В каком отношении плоскость делит объем пирамиды?

Санкт-Петербургский государственный университет, 1995 год
факультет психологии,
экономический факультет
(ММИОЭМ, МЭ)

Вариант 1

1. Постройте график функции $f(x) = |x^2 - 4|x + \sqrt{2}| - 2|$.
2. Решите неравенство $\log_{x+1}(5x^2 - x) \geq 2$.
3. Решите уравнение $1 - \sin x = \cos 2x + \cos 3x$.
4. Окружность с радиусом 5 с центром в вершине C треугольника ABC площади 30 делит основание AB на три отрезка AP , PQ и QB , длины которых в указанном порядке образуют арифметическую прогрессию. Найдите длину основания.
5. Дан куб $ABCD A' B' C' D'$ с ребром a . Найдите объем общей части четырехугольных пирамид $B' C' C D D'$ и $C A B C D$.

Вариант 2

1. Постройте график функции $f(x) = |x^2 - 6|x - \sqrt{3}| - 3|$.
2. Решите неравенство $\log_{1-x}(3x^2 - x) \leq 2$.
3. Решите уравнение $1 + \cos 2x = \cos x + \sin 3x$.
4. Окружность с радиусом $\sqrt{10}$ с центром в вершине M треугольника KLM площади 12 делит основание KL на три отрезка KF , FG и GL , длины которых в указанном порядке образуют арифметическую прогрессию. Найдите длину основания.
5. Дан куб $ABCD A' B' C' D'$ с ребром b . Найдите объем общей части четырехугольных пирамид $C' A B C D$ и $C A' B' B A$.

Санкт-Петербургский государственный университет, 1995 год
экономический факультет
(отделения ЭИР, МС)

Вариант 1

1. Нарисуйте график функции $f(x) = \log_2(x^2 - 3x) - \log_4 x^2$.
2. Решите неравенство $|x^2 - 4x + 3| \leq |x^2 + x - 3|$.
3. Решите уравнение $\sqrt{4x+1} + \sqrt{3x-2} = 5$.
4. Решите уравнение $(1 + \sin x) \cos x = \cos 2x \cos 3x$.
5. В треугольнике ABC основание AC равно 25 см, а высоты AK и CL равны соответственно 20 см и 24 см. Найдите длины боковых сторон треугольника.

Вариант 2

1. Нарисуйте график функции $f(x) = \log_3(x^2 + 2x) - \log_9 x^2$.
2. Решите неравенство $|x^2 - 3x + 2| > |x^2 - 2x - 2|$.
3. Решите уравнение $\sqrt{2x+5} + \sqrt{6+x} = 3$.
4. Решите уравнение $(1 + \cos x) \sin x = \cos 2x \sin 3x$.
5. В треугольнике ABC высоты AP и BQ равны 5 см каждая, а высота CR равна 6 см. Найдите площадь треугольника.

Санкт-Петербургский государственный университет, 1995 год
физический факультет,
геологический факультет,
факультет географии и геоэкологии

Вариант 1

1. Нарисуйте график функции $f(x) = |x^2 - |1 + 2x||$.
2. Решите неравенство $\log_2(x-1) + \log_2 x \leq 1$.
3. Решите уравнение $\sqrt{3x-2} + \sqrt{x-1} = 3$.
4. Решите уравнение $\cos x = \sqrt{\cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right)}$.
5. В равнобедренную трапецию $ABCD$ вписана окружность с центром O и радиусом r . Найдите радиус окружности, если известно, что $OA = a$, $OD = b$.

Вариант 2

1. Нарисуйте график функции $f(x) = |x^2 - |2x - 1||$.
2. Решите неравенство $\log_3(x+2) + \log_3 x \leq 1$.
3. Решите уравнение $\sqrt{2x-2} + \sqrt{x-2} = 3$.
4. Решите уравнение $\sin x = \sqrt{\sin\left(x - \frac{\pi}{2}\right)}$.
5. Равнобедренная трапеция $ABCD$ описана около окружности с центром O и радиусом r . Известно, что $OA = a$. Найдите расстояние от точки O до остальных вершин.

Вариант 1

1. В первом сосуде находится 0,3 л 40%-ного раствора кислоты, а во втором — 0,5 л 30%-ного раствора той же кислоты. Какое количество 90%-ного раствора кислоты нужно добавить в каждый из сосудов, чтобы концентрации растворов стали одинаковыми, а количество раствора в первом сосуде стало вдвое меньше, чем во втором?

2. Нарисуйте график функции $f(x) = \frac{6 - 4x + \frac{x^2}{2}}{|x - 4| - 2}$.

3. Решите уравнение $\log_{3x}^2 9x^3 = \log_{3x} 9x + 2$.

4. Решите уравнение $\sqrt{\sin^2 x - \sin \frac{x}{2}} = \cos x$.

5. В равнобедренный треугольник с основанием a и углом α при основании помещены две касающиеся друг друга окружности равных радиусов. При этом каждая окружность касается основания треугольника и одной боковой стороны. Найдите радиус окружности.

Вариант 2

1. В первом сосуде находится 0,7 л 20%-ного раствора кислоты, а во втором — 0,3 л 10%-ного раствора той же кислоты. Какое количество 80%-ного раствора кислоты нужно добавить в каждый из сосудов, чтобы концентрации растворов стали одинаковыми, а количество раствора в первом сосуде стало вдвое больше, чем во втором?

2. Нарисуйте график функции $f(x) = \frac{6 + 2x - \frac{x^2}{2}}{|x - 2| - 4}$.

3. Решите уравнение $\log_{2x}^2 4x^3 - 2 = \log_{2x} 4x$.

4. Решите уравнение $\sqrt{\cos^2 x - \sin \frac{x}{2}} = \sin x$.

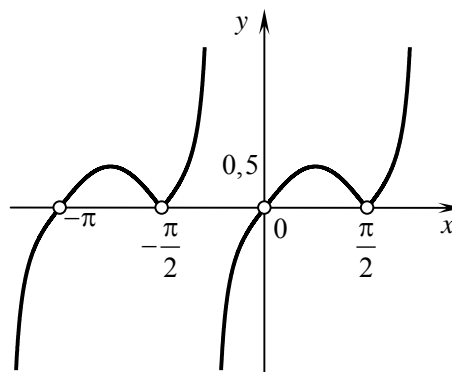
5. В равнобедренном треугольнике с углом β при основании помещены две касающиеся друг друга окружности радиусом R . Каждая из них касается основания треугольника и одной боковой стороны. Найдите основание треугольника.

Ответы к вариантам

Математико-механический факультет,
факультет прикладной математики – процессов управления

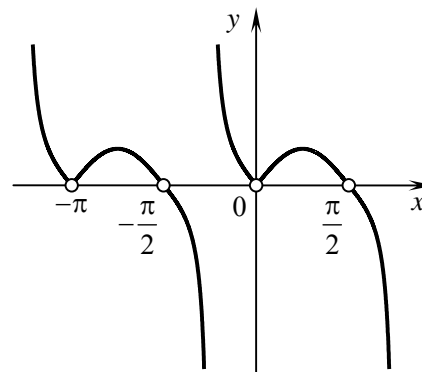
Ответы к варианту 1

1. Ответ: см. рисунок.
2. Ответ: $[512; +\infty)$.
3. Ответ: при $a = 1$: $\bigcup_{k \in \mathbb{Z}} \left[-\frac{\pi}{4} + 2\pi k; \frac{3\pi}{4} + 2\pi k \right]$; $a \geq -1$ и при $a \neq 1$: $\left\{ \frac{\pi}{4} + 2\pi k : k \in \mathbb{Z} \right\}$; при $a \leq -1$: $\left\{ \frac{5\pi}{4} + 2\pi k : k \in \mathbb{Z} \right\}$.
4. Ответ: $\frac{a\sqrt{10}}{2}$.
5. Ответ: $\frac{\sqrt{5}-1}{2}$.



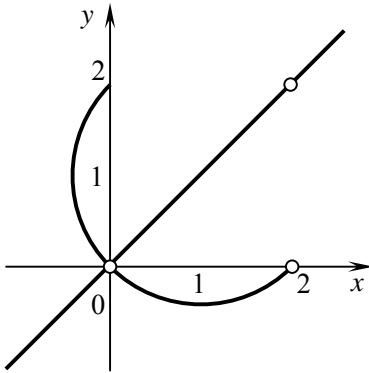
Ответы к варианту 2

1. Ответ: см. рисунок.
2. Ответ: $[1; 81]$.
3. Ответ: при $a = 1$: $\bigcup_{k \in \mathbb{Z}} \left[\frac{\pi}{4} + 2\pi k; \frac{5\pi}{4} + 2\pi k \right]$; $a \geq -1$ и при $a \neq 1$: $\left\{ \frac{3\pi}{4} + 2\pi k : k \in \mathbb{Z} \right\}$; при $a \leq -1$: $\left\{ -\frac{\pi}{4} + 2\pi k : k \in \mathbb{Z} \right\}$.
4. Ответ: $b\sqrt{65}$.
5. Ответ: $\frac{\sqrt{2}}{2}$.



Ответы к варианту 1

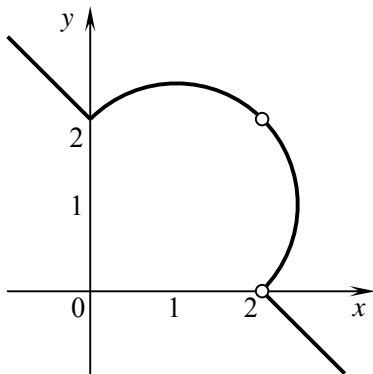
1. Ответ: 27.
2. Ответ: см. рисунок.



3. Ответ: $\{512\}$.
4. Ответ: $\left\{ 2\pi k; \pi - \arcsin\left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right) + 2\pi k : k \in \mathbb{Z} \right\}$.
5. Ответ: $\frac{a\sqrt{10}}{2}$.

Ответы к варианту 2

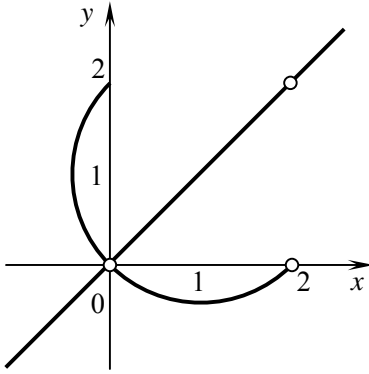
1. Ответ: 28.
2. Ответ: см. рисунок.



3. Ответ: $\{81\}$.
4. Ответ: $\left\{ \frac{\pi}{2} + 2\pi k; -\arccos\left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right) + 2\pi k : k \in \mathbb{Z} \right\}$.
5. Ответ: $b\sqrt{65}$.

Ответы к варианту 1

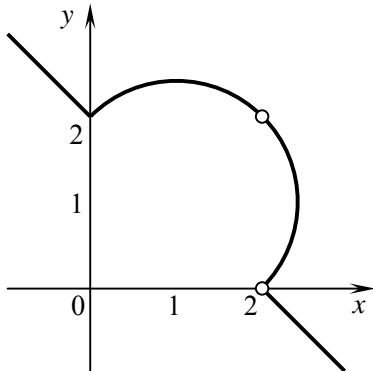
1. Ответ: 27.
2. Ответ: см. рисунок.



3. Ответ: $[512; +\infty)$.
4. Ответ: $\left\{ 2\pi k; \pi - \arcsin\left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right) + 2\pi k : k \in \mathbb{Z} \right\}$.
5. Ответ: $\frac{\sqrt{5}-1}{2}$.

Ответы к варианту 2

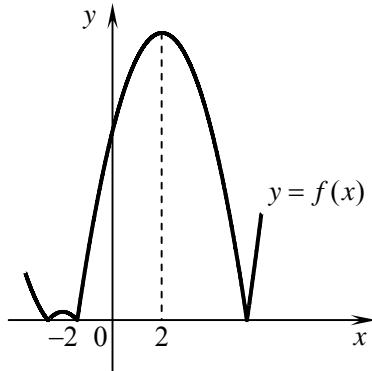
1. Ответ: 28.
2. Ответ: см. рисунок.



3. Ответ: $[1; 81]$.
4. Ответ: $\left\{ \frac{\pi}{2} + 2\pi k; -\arccos\left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right) + 2\pi k : k \in \mathbb{Z} \right\}$.
5. Ответ: $\frac{\sqrt{2}}{2}$.

Ответы к варианту 1

1. Ответ: см. рисунок.



2. Ответ: $\left[-\frac{1}{4}; 0\right) \cup [1; +\infty)$.

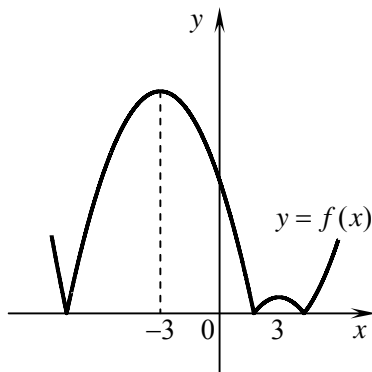
3. Ответ: $\left\{(-1)^k \frac{\pi}{6} + \pi k; (-1)^k \arcsin\left(\frac{\sqrt{5}-1}{2\sqrt{2}}\right) - \frac{\pi}{4} + \pi k : k \in \mathbb{Z}\right\}$.

4. Ответ: $6\sqrt{5}; 12\sqrt{5}$.

5. Ответ: $\frac{a^3}{8}$.

Ответы к варианту 2

1. Ответ: см. рисунок.



2. Ответ: $[-1; 0) \cup \left[\frac{1}{2}; 1\right)$.

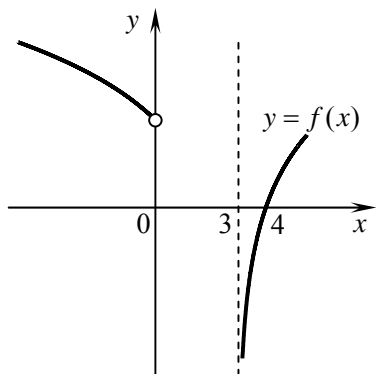
3. Ответ: $\left\{-\frac{\pi}{3} + 2\pi k; \frac{\pi}{3} + 2\pi k; \frac{\pi}{4} + (-1)^{k+1} \arcsin\left(\frac{\sqrt{5}-1}{2\sqrt{2}}\right) + \pi k : k \in \mathbb{Z}\right\}$.

4. Ответ: $6\sqrt{2}; 12\sqrt{2}$.

5. Ответ: $\frac{b^3}{8}$.

Ответы к варианту 1

1. Ответ: см. рисунок.



2. Ответ: $\left[0; \frac{6}{5}\right] \cup \left[\frac{3}{2}; +\infty\right)$.

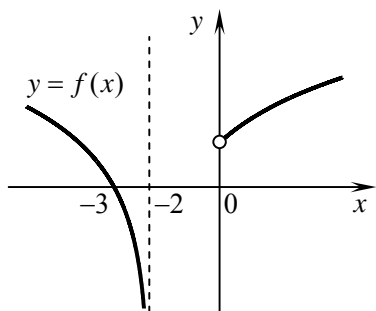
3. Ответ: $\{2\}$.

4. Ответ: $\left\{\frac{\pi k}{2}; (-1)^{k+1} \frac{\pi}{18} + \frac{\pi k}{3}; k \in \mathbb{Z}\right\}$.

5. Ответ: $(25; 30); \left(\frac{625}{11}; \frac{750}{11}\right)$.

Ответы к варианту 2

1. Ответ: см. рисунок.



2. Ответ: $(-\infty; 0) \cup \left(1; \frac{5}{4}\right)$.

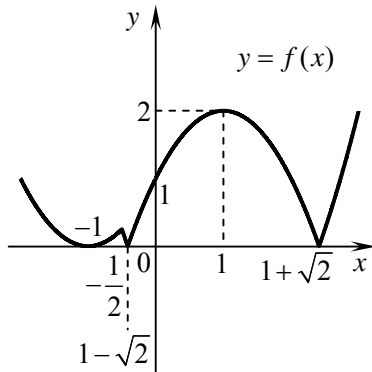
3. Ответ: $\{-2\}$.

4. Ответ: $\left\{\frac{\pi k}{2}; -\frac{\pi}{9} + \frac{2\pi k}{3}; \frac{\pi}{9} + \frac{2\pi k}{3}; k \in \mathbb{Z}\right\}$.

5. Ответ: $\frac{180}{\sqrt{119}}$.

Ответы к варианту 1

1. Ответ: см. рисунок.



2. Ответ: $(1; 2]$.

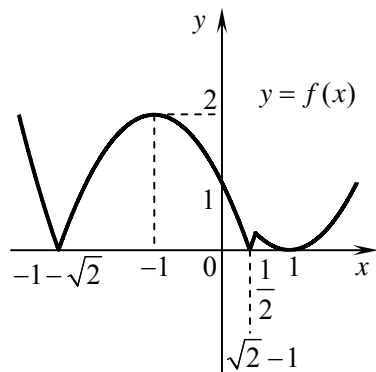
3. Ответ: $\{2\}$.

4. Ответ: $\left\{ -\arcsin\left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right) + 2\pi k : k \in \mathbb{Z} \right\}$.

5. Ответ: $\frac{ab}{\sqrt{a^2+b^2}}$.

Ответы к варианту 2

1. Ответ: см. рисунок.



2. Ответ: $(0; 1]$.

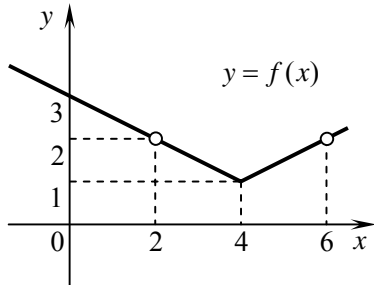
3. Ответ: $\{3\}$.

4. Ответ: $\left\{ \pi - \arccos\left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right) + 2\pi k : k \in \mathbb{Z} \right\}$.

5. Ответ: $\frac{ra}{\sqrt{a^2-r^2}}$.

Ответы к варианту 1

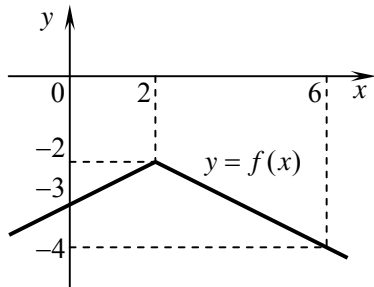
1. Ответ: 0,3; 0,7.
2. Ответ: см. рисунок.



3. Ответ: $\{1; 3^{\frac{5}{6}}\}$.
4. Ответ: $\left\{ \frac{\pi}{3} + 4\pi k; \frac{5\pi}{3} + 4\pi k; -\frac{\pi}{5} + 4\pi k; \frac{11\pi}{5} + 4\pi k : k \in \mathbb{Z} \right\}$.
5. Ответ: $\frac{a}{2\left(1 + \operatorname{ctg} \frac{\alpha}{2}\right)}$.

Ответы к варианту 2

1. Ответ: 0,9; 0,5.
2. Ответ: см. рисунок.



3. Ответ: $\{2^{\frac{5}{6}}; 1\}$.
4. Ответ: $\left\{ \pi + 4\pi k; \frac{13\pi}{5} + 4\pi k; \frac{7\pi}{3} + 4\pi k : k \in \mathbb{Z} \right\}$.
5. Ответ: $\frac{2R}{1 + \operatorname{ctg} \frac{\beta}{2}}$.