

**Единый государственный экзамен по математике, 2001 год
демонстрационная версия**

Часть А

А1. Найдите значение выражения $\sqrt[3]{625} + \sqrt{16} - \sqrt[3]{40} - \sqrt{25}$.

1. $4\sqrt[3]{5} + 9$ 2. $3\sqrt[3]{5} - 1$ 3. $3\sqrt[3]{5} + 9$ 4. $7\sqrt[3]{5} - 1$

$$\sqrt[3]{625} + \sqrt{16} - \sqrt[3]{40} - \sqrt{25} = \sqrt[3]{5^4} + 4 - \sqrt[3]{5 \cdot 2^3} - 5 = 5\sqrt[3]{5} - 2\sqrt[3]{5} - 1 = 3\sqrt[3]{5} - 1.$$

Правильный ответ: 2.

А2. Упростите выражение $\cos(\pi - \alpha) + \sin\left(\frac{3\pi}{2} + \alpha\right) - 2\cos(2\pi - \alpha)$.

1. 0 2. $\sin \alpha - \cos \alpha$ 3. $-2\cos \alpha$ 4. $-4\cos \alpha$

$$\begin{aligned}\cos(\pi - \alpha) + \sin\left(\frac{3\pi}{2} + \alpha\right) - 2\cos(2\pi - \alpha) &= -\cos \alpha + (-\cos \alpha) - 2\cos \alpha = \\ &= -\cos \alpha - \cos \alpha - 2\cos \alpha = -4\cos \alpha.\end{aligned}$$

Правильный ответ: 4.

А3. Выполните действия $(a^{0,25})^3 \cdot \sqrt[8]{a}$.

1. $a^{\frac{7}{8}}$ 2. $a^{\frac{7}{4}}$ 3. $a^{\frac{25}{8}}$ 4. $a^{\frac{3}{2}}$

$$(a^{0,25})^3 \cdot \sqrt[8]{a} = a^{\frac{3}{4}} \cdot a^{\frac{1}{8}} = a^{\frac{3}{4} + \frac{1}{8}} = a^{\frac{7}{8}}.$$

Правильный ответ: 1.

А4. Упростите выражение $\log_6 48 - \log_6 4 + \log_6 3$.

1. 47 2. 36 3. 2 4. 4

$$\log_6 48 - \log_6 4 + \log_6 3 = \log_6 \left(\frac{48 \cdot 3}{4} \right) = \log_6 36 = 2.$$

Правильный ответ: 3.

A5. Решите неравенство $\log_3(x-3) > \log_3(4-x)$.

1. $(3; 4)$ 2. $\left(\frac{7}{2}; 4\right)$ 3. $(3; +\infty)$ 4. $\left(\frac{7}{2}; +\infty\right)$

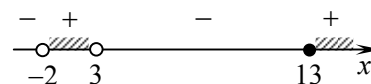
$$\begin{aligned} \log_3(x-3) > \log_3(4-x) &\Leftrightarrow \begin{cases} x-3 > 0, \\ 4-x > 0, \\ x-3 > 4-x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 3, \\ x < 4, \\ 2x-7 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x > 3, \\ x < 4, \\ x > \frac{7}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x < 4, \\ x > \frac{7}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \frac{7}{2} < x < 4. \end{aligned}$$

Правильный ответ: 4.

A6. Решите неравенство $\frac{3}{x+2} - \frac{2}{x-3} \geq 0$.

1. $[13; +\infty)$ 2. $[-2; 3) \cup (13; +\infty)$ 3. $(-2; 3] \cup [13; +\infty)$ 4. $(-2; 3) \cup [13; +\infty)$

$$\begin{aligned} \frac{3}{x+2} - \frac{2}{x-3} \geq 0 &\Leftrightarrow \frac{3(x-3) - 2(x+2)}{(x+2)(x-3)} \geq 0 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \frac{x-13}{(x+2)(x-3)} \geq 0 \end{aligned}$$



Правильный ответ: 4.

A7. Найдите область определения функции $f(x) = \sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^{x-3} - \frac{1}{2}}$.

1. $(-\infty; 2]$ 2. $[2; +\infty)$ 3. $[4; +\infty)$ 4. $(-\infty; 4]$

Область определения функции задается неравенством $\left(\frac{1}{2}\right)^{x-3} - \frac{1}{2} \geq 0$.

$$\left(\frac{1}{2}\right)^{x-3} - \frac{1}{2} \geq 0 \Leftrightarrow \left(\frac{1}{2}\right)^{x-3} \geq \frac{1}{2} \Leftrightarrow x-3 \leq 1 \Leftrightarrow x \leq 4.$$

Правильный ответ: 4.

A8. Найдите область значений функции $y = 2\sin x + 1$.

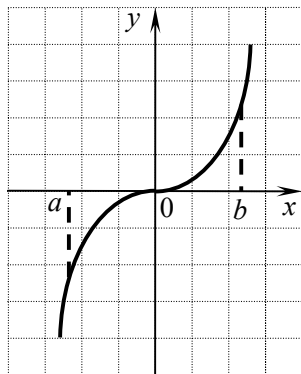
1. $[-1; 3]$ 2. $[-2; 3]$ 3. $[2; 3]$ 4. $[-1; 2]$

$$-1 \leq \sin x \leq 1 \Leftrightarrow -2 \leq 2\sin x \leq 2 \Leftrightarrow -1 \leq 2\sin x + 1 \leq 3.$$

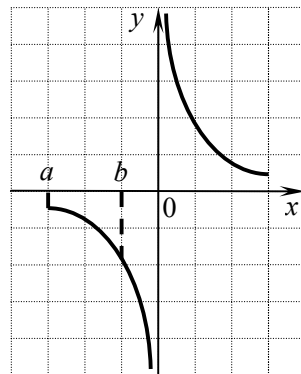
Правильный ответ: 1.

A9. Какие функции возрастают на промежутке $[a; b]$?

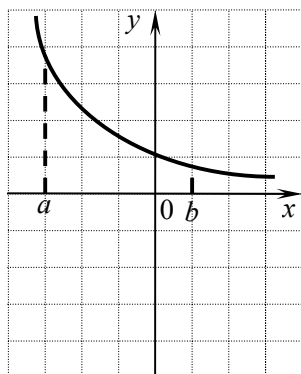
1.



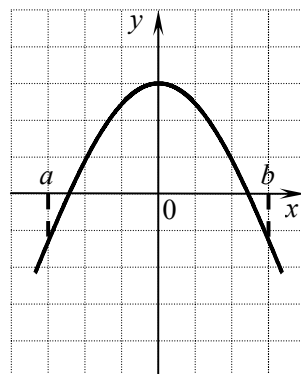
2.



3.



4.



Решение: функция, график которой изображен на рисунке 1, возрастает на промежутке $[a; b]$. Функции, графики которых изображены на рисунках 2 и 3, убывают на промежутке $[a; b]$. Функция, график которой изображен на рисунке 4, не является монотонной на промежутке $[a; b]$.
Правильный ответ: 1.

A10. Найдите значение производной функции $y = f(x)$ в точке x_0 .

1. -2

2. 2

3. -1

4. 1

Значение производной в точке касания равно тангенсу угла наклона касательной, проведенной в этой точке. Найдем его:

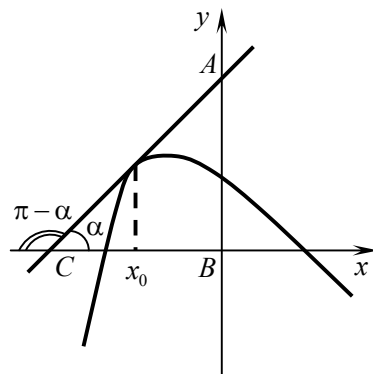
$$\operatorname{tg}(\pi - \alpha) = -\operatorname{tg} \alpha.$$

Значение $\operatorname{tg} \alpha$ из треугольника ABC (см. рис.) равно отношению $\frac{AB}{BC}$:

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{AB}{BC} = \frac{4}{4} = 1,$$

следовательно, $\operatorname{tg}(\pi - \alpha) = -1$.

Правильный ответ: 3.



A11. Найдите производную функции $h(x) = x^2 + 3 \sin x$.

1. $h'(x) = x^3 - 3 \cos x$ 2. $h'(x) = 2x + 3 \cos x$ 3. $h'(x) = 2x + \cos x$ 4. $h'(x) = \frac{1}{3}x^3 - \cos x$

$$h'(x) = 2x + 3 \cos x.$$

Правильный ответ: 2.

A12. Для функции $f(x) = -3 \cos x$ укажите первообразную, которая проходит через точку $M\left(\frac{\pi}{2}; -12\right)$.

1. $F(x) = 3 \cos x - 12$ 2. $F(x) = 3 \sin x - 9$ 3. $F(x) = -3 \sin x - 9$ 4. $F(x) = 3 \sin x - 12$

Найдем первообразную:

$$F(x) = -3 \sin x + C.$$

Найдем C :

$$F\left(\frac{\pi}{2}\right) = -12 \Leftrightarrow -3 \sin \frac{\pi}{2} + C = -12 \Leftrightarrow -3 + C = -12 \Leftrightarrow C = -9.$$

Таким образом,

$$F(x) = -3 \sin x - 9.$$

Правильный ответ: 3.

Часть В

B1. Найдите корни уравнения $2 \cos x - \cos^2 x = \sin^2 x$, принадлежащие промежутку $[0^\circ; 270^\circ]$.

$$\begin{aligned} 2 \cos x - \cos^2 x = \sin^2 x &\Leftrightarrow 2 \cos x = \sin^2 x + \cos^2 x \Leftrightarrow 2 \cos x = 1 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \cos x = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{3} + 2\pi k, \\ x = -\frac{\pi}{3} + 2\pi n; \end{cases} k, n \in \mathbb{Z}. \end{aligned}$$

Отберем корни, решая двойные неравенства:

$$\begin{aligned} 0 \leq \frac{\pi}{3} + 2\pi k \leq \frac{3\pi}{2} &\Leftrightarrow -\frac{1}{6} \leq k \leq \frac{7}{12} \Leftrightarrow k = 0, \\ 0 \leq -\frac{\pi}{3} + 2\pi n \leq \frac{3\pi}{2} &\Leftrightarrow \frac{1}{6} \leq n \leq \frac{11}{12}, \text{ решений нет.} \end{aligned}$$

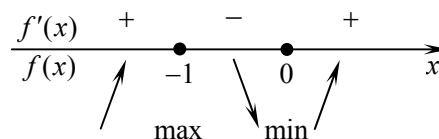
Тогда уравнение имеет единственное решение $\frac{\pi}{3} = 60^\circ$.

Ответ: 60° .

B2. Найдите точку максимума функции $f(x) = 2x^3 + 3x^2$.

$$f'(x) = 6x^2 + 6x = 6x(x+1);$$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow 6x(x+1) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1, \\ x = 0. \end{cases}$$



Ответ: точка максимума: -1 .

B3. Найдите наименьший корень уравнения $2^{|x+4|} - 8 = 0$.

Решим уравнение

$$2^{|x+4|} - 8 = 0 \Leftrightarrow 2^{|x+4|} = 2^3 \Leftrightarrow |x+4| = 3 \Leftrightarrow \begin{cases} x+4 = -3, \\ x+4 = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -7, \\ x = -1. \end{cases}$$

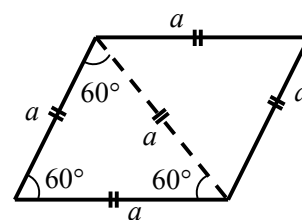
Таким образом, наименьшим корнем уравнения является -7 .

Ответ: -7 .

B4. Острый угол ромба равен 60° , а площадь — $18\sqrt{3}$. Найдите меньшую диагональ ромба.

Пусть сторона ромба равна a , $a > 0$. Меньшая диагональ делит его на два равных равнобедренных треугольника с углом при вершине 60° , то есть эти треугольники являются равносторонними с площадями $\frac{a^2\sqrt{3}}{4}$. Тогда площадь ромба есть:

$$S = 2 \cdot \frac{a^2\sqrt{3}}{4} = \frac{a^2\sqrt{3}}{2}.$$



Решим уравнение

$$\frac{a^2\sqrt{3}}{2} = 18\sqrt{3} \Leftrightarrow a^2 = 36 \Leftrightarrow_{a>0} a = 6.$$

Таким образом, меньшая диагональ ромба равна 6.

Ответ: 6.

B5. Вычислите значение произведения $x \cdot y$, где $(x; y)$ — решение системы

уравнений $\begin{cases} x - y = 2, \\ (x^2 - y^2)(x + y) = 200. \end{cases}$

Решим уравнение

$$\begin{aligned} \begin{cases} x - y = 2, \\ (x^2 - y^2)(x + y) = 200 \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} x - y = 2, \\ (x - y)(x + y)^2 = 200 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x - y = 2, \\ (x + y)^2 = 100 \end{cases} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x - y = 2, \\ x + y = -10, \\ x + y = 10 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \begin{cases} x - y = 2, \\ x + y = -10, \end{cases} \\ \begin{cases} x - y = 2, \\ x + y = 10 \end{cases} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \begin{cases} x = -4, \\ y = -6, \end{cases} \\ \begin{cases} x = 6, \\ y = 4. \end{cases} \end{cases} \end{aligned}$$

Таким образом, произведением решений системы будет являться число 24.

Ответ: 24.

В6. Теплоход прошел расстояние от A до B по течению реки за 7 ч, а от B до A — за 14 ч. За какое время проплывет от A до B плот?

Пусть S — расстояние между A и B , v — скорость теплохода, u — скорость течения реки ($S, v, u > 0$, $v > u$). При движении из A в B скорость теплохода была $v + u = \frac{S}{7}$ км/ч, при движении из B в A скорость была $v - u = \frac{S}{14}$ км/ч.

Решим систему

$$\begin{cases} v + u = \frac{S}{7}, \\ v - u = \frac{S}{14} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} v + u = 2(v - u), \\ v - u = \frac{S}{14} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} v = 3u, \\ u = \frac{S}{28}. \end{cases}$$

Таким образом, скорость течения реки равна $\frac{S}{28}$ км/ч, и плот, движущийся со скоростью реки, пройдет пусть от A до B за 28 часов.
 Ответ: 28 часов.

В7. Вычислите значение выражения $5 \sin(\arccos 0,6)$.

$$5 \sin(\arccos 0,6) = 5 \cdot \sqrt{1 - \cos^2(\arccos 0,6)} = 5 \cdot \sqrt{1 - (0,6)^2} = 5 \cdot \sqrt{0,64} = 5 \cdot 0,8 = 4.$$

Ответ: 4.

В8. Найдите наибольшее значение функции $y = \sqrt{3}^{2-x^2+4x}$.

Так как $\sqrt{3} > 1$, наибольшее значение функция $y(x)$ принимает при наибольшем значении функции $g(x) = 2 - x^2 + 4x$. Квадратный трехчлен $g(x) = -x^2 + 4x + 2$ принимает наибольшее значение в точке $x = \frac{-4}{2(-1)} = 2$, и оно равно $g(2) = 6$. Таким образом, наибольшее значение функции есть $y = \sqrt{3}^6 = 27$.

Ответ: 27.

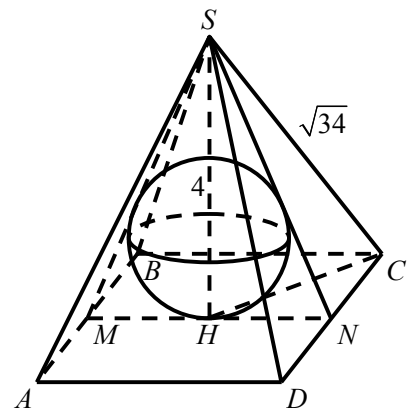
В9. Высота правильной четырехугольной пирамиды равна 4 м, а боковое ребро — $\sqrt{34}$ м. Найдите площадь сферы, вписанной в пирамиду (число π считайте равным 3).

Пусть $SABCD$ — есть заданная пирамида. Соединим основание высоты пирамиды с вершиной основания пирамиды (см. рисунок). Поскольку треугольник SHC — прямоугольный, длина HC равна:

$$|HC| = \sqrt{|SC|^2 - |SH|^2} = \sqrt{34 - 16} = \sqrt{18} \text{ м.}$$

Тогда сторона квадрата $ABCD$ равна $|HC| \cdot \sqrt{2} = 6$ м.

Проведем сечение пирамиды плоскостью, проходящей через центр сферы, перпендикулярно сторонам основания и рассмотрим треугольник SMN , где M, N соответственно середины сторон AB и CD квадрата. Радиус сферы есть радиус окружности, вписанной в треугольник SMN .



Поскольку $r = \frac{S}{p}$, причем

$$S = \frac{1}{2} |SH| \cdot |MN| = \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 6 = 12 \text{ м}^2,$$

$$p = \frac{1}{2} (|MS| + |SN| + |NM|) = \frac{1}{2} (\sqrt{16+9} + \sqrt{16+9} + 6) = \\ = \frac{1}{2} (5 + 5 + 6) = \frac{16}{2} = 8 \text{ м}; \quad r = \frac{S}{p} = \frac{12}{8} = \frac{3}{2} \text{ м}.$$

Тогда площадь сферы есть:

$$S_{\text{сф.}} = 4\pi r^2 = 4\pi \left(\frac{3}{2}\right)^2 \Big|_{\pi=3} = 4 \cdot 3 \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^2 = 27 \text{ м}^2.$$

Ответ: 27 м^2 .

В10. Найдите наибольшее целое значение параметра a , при котором функция $g(x) = ax^2 - x^3 - 3ax - 1$ убывает на множестве всех действительных чисел.

Функция $g(x)$ убывает на $\mathbb{R}$ только в том случае, когда ее производная $g'(x) = 2ax - 3x^2 - 3a$ неположительна на $\mathbb{R}$, то есть уравнение $g'(x) = 0 \Leftrightarrow 3x^2 - 2ax + 3a = 0$ не имеет более одного корня. Для этого достаточна неположительность дискриминанта. Решим соответствующее неравенство:

$$D \leq 0 \Leftrightarrow \frac{D}{4} \leq 0 \Leftrightarrow a^2 - 9a \leq 0 \Leftrightarrow 0 \leq a \leq 9.$$

Наибольшее целое значение параметра: 9.

Ответ: 9.

Часть С

С1. Решите неравенство $(2 - |x-1|) \log_{\frac{1}{10}}(4x^2 + 8) \leq 0$.

Так как $4x^2 + 8 > 1$, а $\frac{1}{10} < 1$, то $\log_{\frac{1}{10}}(4x^2 + 8) < 0$, тогда

$$2 - |x-1| \geq 0 \Leftrightarrow |x-1| \leq 2 \Leftrightarrow \begin{cases} x-1 \leq 2 \\ x-1 \geq -2 \end{cases} \Leftrightarrow -1 \leq x \leq 3.$$

Ответ: $[-1; 3]$.

С2. Найдите нули функции $h(x) = 6x + x^2 - x^3 - \sqrt{\cos \pi x - 1}$.

Решим уравнение

$$6x + x^2 - x^3 = \sqrt{\cos \pi x - 1} \Leftrightarrow \begin{cases} \cos \pi x = 1, \\ 6x + x^2 - x^3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \pi x = 2\pi k, k \in \mathbb{Z}, \\ x^3 - x^2 - 6x = 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 2k, k \in \mathbb{Z}, \\ x = 0, \\ x^2 - x - 6 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2k, k \in \mathbb{Z}, \\ x = -2, \\ x = 0, \\ x = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -2, \\ x = 0. \end{cases}$$

Ответ: $\{-2; 0\}$.

С3. Вычислите значение выражения $3^{\sqrt{\log_3 2}} - 2^{\sqrt{\log_2 3}}$.

Покажем, что

$$\begin{aligned} a^{\sqrt{\log_a b}} &= b^{\sqrt{\log_b a}} \Leftrightarrow \log_a a^{\sqrt{\log_a b}} = \log_a b^{\sqrt{\log_b a}} \Leftrightarrow \sqrt{\log_a b} = \sqrt{\log_b a} \cdot \log_a b \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \sqrt{\log_a b} = \sqrt{\log_b a} \cdot \sqrt{\log_a^2 b} \Leftrightarrow \sqrt{\log_a b} = \sqrt{\log_b a \cdot \log_a^2 b} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \sqrt{\log_a b} = \sqrt{\frac{\log_a^2 b}{\log_a b}} \Leftrightarrow \sqrt{\log_a b} = \sqrt{\log_a b} \text{ — верно.} \end{aligned}$$

Тогда ответ к задаче — нуль.

Ответ: 0.