Единый государственный экзамен по математике, 2002 год демонстрационная версия

Часть А

А1. Упростите выражение $\dfrac{5^{\frac{1}{4}}\cdot\sqrt[3]{3}}{\sqrt[3]{225}}$.

1. $5^{\frac{11}{12}}\cdot 3^{-\frac{1}{3}}$ **2.** $5^{\frac{1}{12}}\cdot 3$ **3.** $5^{-\frac{5}{12}}\cdot 3^{-\frac{1}{3}}$ **4.** $5^{\frac{5}{12}}\cdot 3^{\frac{1}{3}}$

$$\frac{5^{\frac{1}{4}}\cdot\sqrt[3]{3}}{\sqrt[3]{225}}=\frac{5^{\frac{1}{4}}\cdot 3^{\frac{1}{3}}}{\sqrt[3]{5^2\cdot 3^2}}=\frac{5^{\frac{1}{4}}\cdot 3^{\frac{1}{3}}}{5^{\frac{2}{3}}\cdot 3^{\frac{2}{3}}}=5^{\frac{1}{4}-\frac{2}{3}}\cdot 3^{\frac{1}{3}-\frac{2}{3}}=5^{-\frac{5}{12}}\cdot 3^{-\frac{1}{3}}.$$

Правильный ответ: 3.

А2. Найдите значение выражения $\dfrac{x-y}{x^{\frac{2}{3}}+x^{\frac{1}{3}}\cdot y^{\frac{1}{3}}+y^{\frac{2}{3}}}+y^{\frac{1}{3}}$, если $x=27$ и $y=25$.

1. $3-5^{\frac{1}{3}}$ **2.** 3 **3.** 9 **4.** $3+5^{\frac{2}{3}}$

Упростим выражение

$$\frac{x-y}{x^{\frac{2}{3}}+x^{\frac{1}{3}}\cdot y^{\frac{1}{3}}+y^{\frac{2}{3}}}+y^{\frac{1}{3}}=\frac{\sqrt[3]{x}^{\,3}-\sqrt[3]{y}^{\,3}}{\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[3]{x}\cdot\sqrt[3]{y}+\sqrt[3]{y^2}}+\sqrt[3]{y}=$$

$$=\frac{(\sqrt[3]{x}-\sqrt[3]{y})(\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[3]{x}\cdot\sqrt[3]{y}+\sqrt[3]{y^2})}{\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[3]{x}\cdot\sqrt[3]{y}+\sqrt[3]{y^2}}+\sqrt[3]{y}=\sqrt[3]{x}-\sqrt[3]{y}+\sqrt[3]{y}=\sqrt[3]{x}.$$

При $x=27$:

$$\sqrt[3]{x}=\sqrt[3]{27}=3.$$

Правильный ответ: 2.

А3. Вычислите $\log_2 0{,}04+2\log_2 5$.

1. 0 **2.** 3 **3.** -1 **4.** $\log_2 5$

$$\log_2 0{,}04+2\log_2 5=\log_2 0{,}04+\log_2 5^2=\log_2(0{,}04\cdot 25)=\log_2 1=0.$$

Правильный ответ: 1.

A4. Упростите выражение $\sin\alpha\cdot\sin 2\alpha+\cos\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)+\cos\alpha\cdot\cos 2\alpha$.

1. 0 **2.** $2\cos\alpha$ **3.** $\sin\alpha+\cos\alpha$ **4.** $\cos\alpha-\sin\alpha$

$$\sin\alpha\cdot\sin 2\alpha+\cos\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)+\cos\alpha\cdot\cos 2\alpha=$$
$$=\cos\alpha\cdot\cos 2\alpha+\sin\alpha\cdot\sin 2\alpha-\sin\alpha=\cos(\alpha-2\alpha)-\sin\alpha=\cos(-\alpha)-\sin\alpha=\cos\alpha-\sin\alpha.$$

Правильный ответ: 4.

A5. Укажите промежуток, которому принадлежит корень уравнения $\left(\frac{1}{8}\right)^{0,5x-1}=4$.

1. $[-3;-1)$ **2.** $[-1;1)$ **3.** $[1;3)$ **4.** $[3;5)$

Решим уравнение

$$\left(\frac{1}{8}\right)^{0,5x-1}=4\Leftrightarrow\left(\frac{1}{2}\right)^{3(0,5x-1)}=\left(\frac{1}{2}\right)^{-2}\Leftrightarrow 3(0,5x-1)=-2\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow\frac{3}{2}x-3=-2\Leftrightarrow\frac{3}{2}x=1\Leftrightarrow x=\frac{2}{3}.$$

Корень уравнения принадлежит промежутку $[-1;1)$.
Правильный ответ: 2.

A6. Решите неравенство $\log_{\frac{1}{2}}\left(2-\frac{1}{2}x\right)\geq -1$.

1. $[0;4)$ **2.** $(-\infty;0]$ **3.** $(4;+\infty)$ **4.** $(4;6]$

$$\log_{\frac{1}{2}}\left(2-\frac{1}{2}x\right)\geq -1\underset{\frac{1}{2}<1}{\Leftrightarrow}\begin{cases}2-0,5x>0,\\2-0,5x\leq 0,5^{-1}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}0,5x<2,\\0,5x\geq 0\end{cases}\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow\begin{cases}x\geq 0,\\x<4\end{cases}\Leftrightarrow 0\leq x<4.$$

Правильный ответ: 1.

A7. Найдите область определения функции $y=\sqrt{5^{2x-3}-1}$.

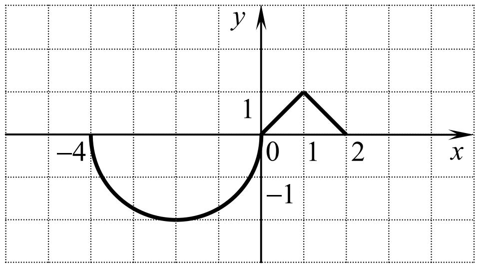
1. $(1,5;+\infty)$ **2.** $[2;+\infty)$ **3.** $[1,5;+\infty)$ **4.** $[5;+\infty)$

Область определения функции задается неравенством $5^{2x-3}-1\geq 0$.

$$5^{2x-3}-1\geq 0\Leftrightarrow 5^{2x-3}\geq 5^{0}\underset{5>1}{\Leftrightarrow}2x-3\geq 0\Leftrightarrow x\geq\frac{3}{2}.$$

Правильный ответ: 3.

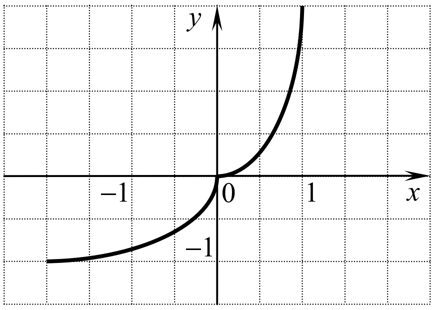
A8. Функция $y = p(x)$ задана графиком на отрезке $[-4; 2]$. Найдите область ее значений.

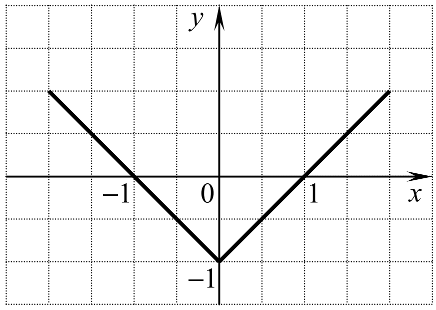


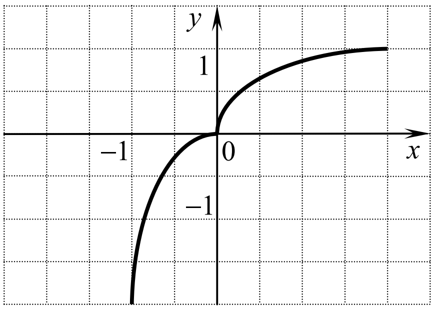
1. $[-4; 2]$
2. $[-2; 0]$
3. $[-2; 4]$
4. $[-2; 1]$

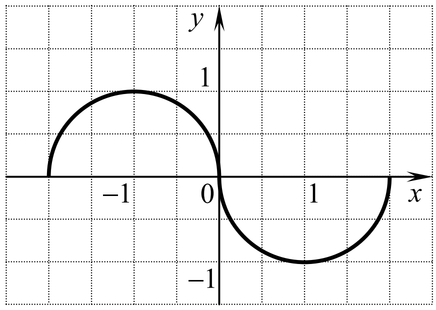
Правильный ответ: 4.

A9. Укажите график нечетной функции.

1. 

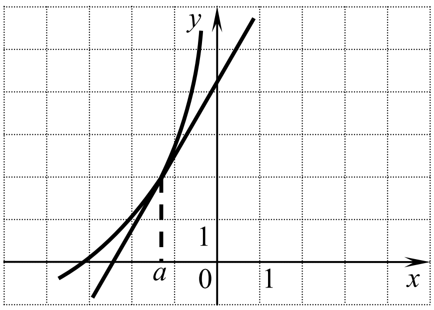
2. 

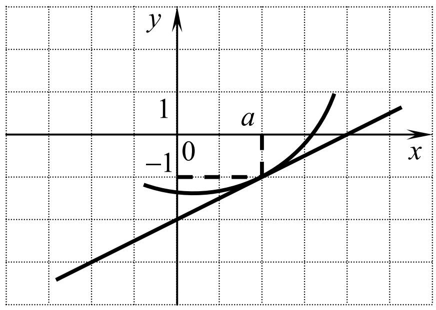
3. 

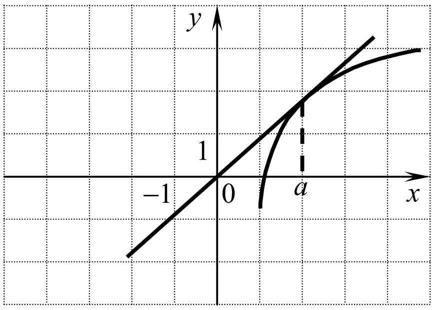
4. 

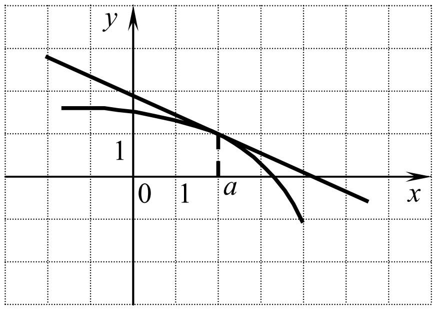
Графики нечетных функций симметричны относительно начала координат.
Правильный ответ: 4.

A10. На рисунках изображены графики функций и касательные к ним в точке a. Укажите функцию, производная которой в точке a равна 1.

1. 

2. 

3. 

4. 

Значение производной в точке a равно угловому коэффициенту касательной, то есть тангенсу угла наклона касательной к оси абсцисс под углом $45°$ на рисунке 3.
Правильный ответ: 3.

A11. Найдите значение производной функции $y=\dfrac{x-18}{x}$ в точке $x_0=-3$.

1. 2	**2.** 0	**3.** –2	**4.** -3

I способ.

$$y'=\frac{(x-18)'\cdot x-x'(x-18)}{x^2}=\frac{18}{x^2};$$

$$y'(-3)=\frac{18}{(-3)^2}=\frac{18}{9}=2.$$

II способ.

$$y(x)=\frac{x-18}{x}=1-\frac{18}{x};$$

$$y'(x)=\frac{18}{x^2};$$

$$y'(-3)=2.$$

Правильный ответ: 1.

A12. Укажите первообразную функции $f(x)=2-\sin x$.

1. $F(x)=2x-\cos x$	**2.** $F(x)=x^2+\cos x$	**3.** $F(x)=2x+\cos x$	**4.** $F(x)=2+\cos x$

$$F(x)=2x^2+\cos x.$$

Правильный ответ: 3.

A13. Найдите корень уравнения $\sin 2x-4\cos x=0$, принадлежащий отрезку $[2\pi;\,3\pi]$.

1. $\dfrac{7\pi}{3}$	**2.** $\dfrac{5\pi}{2}$	**3.** $\dfrac{9\pi}{4}$	**4.** $\dfrac{13\pi}{6}$

Решим уравнение

$$\sin 2x - 4\cos x = 0 \Leftrightarrow 2\sin x \cdot \cos x - 4\cos x = 0 \Leftrightarrow 2\cos x(\sin x - 2) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \cos x = 0, \\ \sin x = 2 - \text{решений нет} \end{array}\right. \Leftrightarrow \cos x = 0 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + \pi k,\ k \in \mathbb{Z}.$$

Отберем корни:

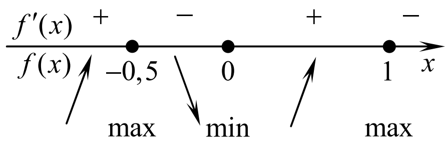
$$2\pi \le \frac{\pi}{2} + \pi k \le 3\pi \Leftrightarrow 2 \le \frac{1}{2} + k \le 3 \Leftrightarrow \frac{3}{2} \le k \le \frac{5}{2} \underset{k\in\mathbb{Z}}{\Leftrightarrow} k = 2.$$

Искомый корень: $\frac{\pi}{2} + 2\pi = \frac{5\pi}{2}$.

Правильный ответ: 2.

Часть B

B1. Найдите минимум функции $f(x) = \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}x^4$.



$$f'(x) = x^2 + x - 2x^3 = -x(2x^2 - x - 1).$$

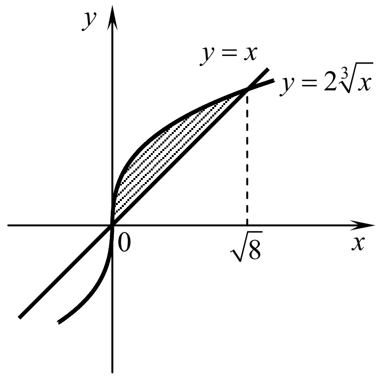
$$f_{\min} = f(0) = 0.$$

Ответ: 0.

B2. Вычислите площадь фигуры, расположенной в первой координатной четверти и ограниченной линиями $y = 2\sqrt[3]{x}$, $y = x$.

Решим уравнение

$$2\sqrt[3]{x} = x \Leftrightarrow \sqrt[3]{x^2} = 2 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -\sqrt{8}, \\ x = 0, \\ x = \sqrt{8}. \end{array}\right.$$



Итак, площадь фигуры равна:

$$S = \int_0^{\sqrt{8}} (2\sqrt[3]{x} - x)dx = \left(2 \cdot \frac{x^{\frac{4}{3}}}{\frac{4}{3}} - \frac{x^2}{2}\right)\Bigg|_0^{\sqrt{8}} =$$

$$= \frac{3}{2}(\sqrt{8})^{\frac{4}{3}} - \frac{1}{2}(\sqrt{8})^2 =$$

$$= \frac{3\sqrt[3]{8^4}}{2} - \frac{8}{2} = \frac{3 \cdot 4}{2} - 4 = 6 - 4 = 2.$$

Ответ: 2.

B3. Сколько решений имеет уравнение $(\cos^2 x - \sin^2 x)\sqrt{1-x^2} = 0$?

$$(\cos^2 x - \sin^2 x)\sqrt{1-x^2} = 0 \Leftrightarrow \cos 2x\sqrt{1-x^2} = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-1, \\ x=1, \\ \begin{cases} 1-x^2 \ge 0, \\ \cos 2x = 0 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-1, \\ x=1, \\ \begin{cases} 1-x^2 \ge 0, \\ 2x = \dfrac{\pi}{2} + \pi k,\ k\in\mathbb{Z} \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-1, \\ x=1, \\ \begin{cases} -1 \le x \le 1, \\ x = \dfrac{\pi}{4} + \dfrac{\pi k}{2},\ k\in\mathbb{Z}. \end{cases} \end{array}\right.$$

Решим неравенство

$$-1 \le \frac{\pi}{4} + \frac{\pi k}{2} \le 1 \Leftrightarrow -\frac{1}{\pi} \le \frac{1}{4} + \frac{k}{2} \le \frac{1}{\pi} \Leftrightarrow -\frac{2}{\pi} - \frac{1}{2} \le k \le \frac{2}{\pi} - \frac{1}{2} \underset{k\in\mathbb{Z}}{\Leftrightarrow} \left[\begin{array}{l} k=-1, \\ k=0. \end{array}\right.$$

Таким образом: $x = \frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{2} = -\frac{\pi}{4}$, $x = \frac{\pi}{4} + 0 = \frac{\pi}{4}$. Тем самым уравнение имеет 4 корня: -1, 1, $-\frac{\pi}{4}$, $\frac{\pi}{4}$.

Ответ: 4.

B4. При каком наименьшем значении параметра *a* функция $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - x^2 + ax$ возрастает на всей числовой прямой?

$$f'(x) = x^2 - 2x + a.$$

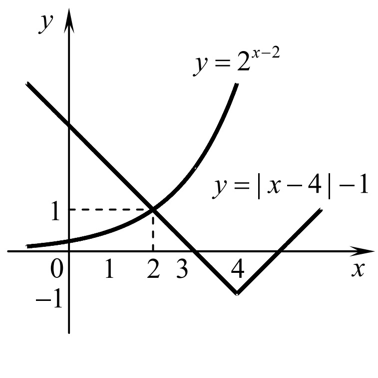
Функция $f(x)$ возрастает на $\mathbb{R}$, если $f'(x) \ge 0$ на $\mathbb{R}$, то есть уравнение $f'(x) = 0$ имеет не более одного корня. Дискриминант отрицателен, если:

$$1 - a \le 0 \Leftrightarrow a \ge 1.$$

Ответ: $a \ge 1$.

B5. Пусть $(x_0;\, y_0)$ — решение системы уравнений $\begin{cases} 2^{x-2} - y = 0, \\ |x-4| - y = 1. \end{cases}$ Найдите произведение $x_0 \cdot y_0$.

$$\begin{cases} 2^{x-2} - y = 0, \\ |x-4| - y = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2^{x-2} = |x-4| - 1 \\ y = |x-4| - 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2, \\ y = 1. \end{cases}$$



Ответ: произведение: 2.

B6. Найдите значение выражения $2\sqrt{5}\,\mathrm{ctg}\left(\arcsin\frac{2}{3}\right)$.

$$2\sqrt{5}\,\mathrm{ctg}\left(\arcsin\frac{2}{3}\right)=2\sqrt{5}\cdot\frac{\cos\left(\arcsin\frac{2}{3}\right)}{\sin\left(\arcsin\frac{2}{3}\right)}=2\sqrt{5}\cdot\frac{\sqrt{1-\sin^2\left(\arcsin\frac{2}{3}\right)}}{\frac{2}{3}}=$$

$$=2\sqrt{5}\cdot\frac{\sqrt{1-\left(\frac{2}{3}\right)^2}}{\frac{2}{3}}=2\sqrt{5}\cdot\frac{\sqrt{\frac{5}{9}}}{\frac{2}{3}}=2\sqrt{5}\cdot\frac{\sqrt{5}}{3}\cdot\frac{3}{2}=5.$$

Ответ: 5.

B7. Найдите наименьшее значение функции $g(x)=\log_{\frac{1}{4}}(4-x^2)$.

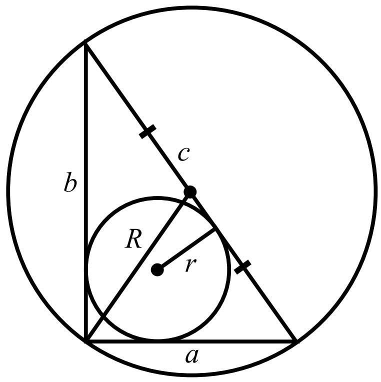
Наименьшее значение функции $g(x)$ достигается в силу убывания функции $\log_{\frac{1}{4}} t$ при наибольшем значении $4-x^2$, на области, где $4-x^2>0$. Это наибольшее значение достигается при $x=0$ и равно 4. Тогда

$$g_{\text{нм.}}=\log_{\frac{1}{4}}4=-1.$$

Ответ: $g_{\text{нм.}}=-1$.

B8. Найдите площадь прямоугольного треугольника, если радиусы вписанной в него и описанной около него окружностей равны соответственно 2 м и 5 м.

1. Так как центр описанной окружности совпадает с половиной гипотенузы, а радиус равен половине гипотенузы,



$$R=\frac{c}{2}\Leftrightarrow c=2R=10 \text{ м}.$$

2. В силу формулы $r=\dfrac{a+b-c}{2}$, имеем:

$$a+b-10=2\cdot 2\Leftrightarrow a+b=14.$$

3. По теореме Пифагора:

$$c^2=a^2+b^2\Big|_{c=10}\Leftrightarrow a^2+b^2=100.$$

4. Решим систему:

$$\begin{cases}a+b=14,\\ a^2+b^2=100\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=14-b,\\ (14-b)^2+b^2=100\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=14-b,\\ b^2-14b+48=0\end{cases}\Leftrightarrow$$

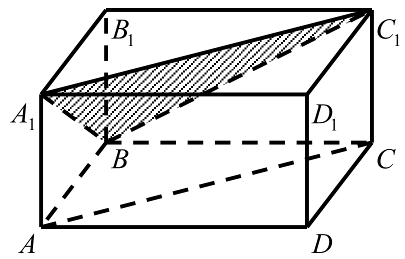
$$\Leftrightarrow \begin{cases} a = 14 - b, \\ \left[\begin{array}{l} b = 6, \\ b = 8 \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} a = 14 - b, \\ b = 6, \end{cases} \\ \begin{cases} a = 14 - b, \\ b = 8 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} a = 8, \\ b = 6, \end{cases} \\ \begin{cases} a = 6, \\ b = 8. \end{cases} \end{array}\right.$$

5. Таким образом, площадь прямоугольного треугольника равна:

$$S = \frac{1}{2}ab = \frac{1}{2} \cdot 8 \cdot 6 = 24 \text{ м}^2.$$

Ответ: $S = 24$ м^2.

B9. В прямоугольном параллелепипеде $ABCDA_1B_1C_1D_1$ сторона $AB = 6$ м, $BC = 8$ м и $BB_1 = 1{,}6\sqrt{91}$ м. Найдите площадь сечения параллелепипеда плоскостью, параллельной прямой AC и содержащей прямую BA_1.



1. Найдем диагональ боковой грани:

$$A_1B = \sqrt{AB^2 + AA_1^{\,2}} = \frac{\sqrt{36 \cdot 25 + 64 \cdot 91}}{5} =$$
$$= \frac{\sqrt{6724}}{5} = \frac{82}{5} \text{ м.}$$

2.

$$BC_1 = \sqrt{BC^2 + CC_1^{\,2}} = \frac{\sqrt{64 \cdot 25 + 64 \cdot 91}}{5} =$$
$$= \frac{\sqrt{7424}}{5} = \frac{16\sqrt{29}}{5} \text{ м.}$$

3.

$$A_1C_1 = \sqrt{A_1B_1^{\,2} + B_1C_1^{\,2}} = \sqrt{36 + 64} = \sqrt{100} = 10 \text{ м.}$$

4. Найдем полупериметр треугольника A_1BC_1:

$$p = \frac{10 + \frac{82}{5} + \frac{16\sqrt{29}}{5}}{2} = 5 + \frac{41}{5} + \frac{8\sqrt{29}}{5} = \frac{66 + 8\sqrt{29}}{5} \text{ м.}$$

5. Площадь равна:

$$S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} = \frac{\sqrt{(66 + 8\sqrt{29})(16 + 8\sqrt{29})(8\sqrt{29} - 16)(66 - 8\sqrt{29})}}{25} =$$
$$= \frac{\sqrt{(66^2 - 8^2 \cdot 29)(8^2 \cdot 29 - 16^2)}}{25} = \frac{\sqrt{2500 \cdot 1600}}{25} = 80 \text{ м}^2.$$

Ответ: $S = 80$ м^2.

Часть С

С1. Найдите количество целых чисел, принадлежащих множеству значений функции $f(x)=16\log_{\frac{1}{16}}\dfrac{\sin x+\cos x+3\sqrt{2}}{\sqrt{2}}$.

Так как $\sin x+\cos x=\sqrt{2}\sin\left(x+\dfrac{\pi}{4}\right)$, то множество значений этой суммы есть отрезок $[-\sqrt{2};\sqrt{2}]$. Значит множество значений числителя дроби — это отрезок $[2\sqrt{2};4\sqrt{2}]$, а для всей дроби — это отрезок $[2;4]$. Так как функция $y=\log_{\frac{1}{16}}x$ является монотонно убывающей и непрерывной, то множество значений данной функции — это отрезок $[16\log_{(16)^{-1}}4;16\log_{(16)^{-1}}2]$. Вычислив значения логарифмов, получаем, что множеством значений функции $f(x)$ является отрезок $[-8;-4]$. Этому отрезку принадлежит ровно пять целых чисел: -8, -7, -6, -5, -4.
Ответ: 5.

С2. Найдите наибольшее значение *a*, при котором уравнение $x^3+5x^2+ax+b=0$ с целыми коэффициентами имеет три различных корня, один из которых равен -2.
1. Подставим $x=-2$ в левую часть уравнения.

$$-8+20-2a+b=0 \Leftrightarrow b=2a-12.$$

2. Так как $x=-2$ является корнем, то в левой части уравнения можно вынести общий множитель $(x+2)$. Производим тождественные преобразования, выделяя общий множитель $(x+2)$:

$$x^3+5x^2+ax+b=0 \Leftrightarrow x^3+2x^2+3x^2+ax+(2a-12)=0 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow x^2(x+2)+3x(x+2)-6x+ax+(2a-12)=0 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow x^2(x+2)+3x(x+2)+(a-6)(x+2)-2(a-6)+(2a-12)=0 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow (x+2)(x^2+3x+(a-6)).$$

3. По условию имеется еще два корня уравнения. Значит, дискриминант первого сомножителя положителен.

$$D=(-3)^3-4(a-6)=33-4a>0 \Leftrightarrow a<\frac{33}{4}.$$

4. Подставим $a=8$ в исходное уравнение

$$x^3+5x^2+ax+b=0 \Leftrightarrow x^3+5x^2+8x+4=0 \Leftrightarrow (x^2+3x+2)(x+2)=0 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow (x+1)(x+2)^2=0.$$

Тогда исходное уравнение имеет только два различных корня. Подставим $a=7$ в исходное уравнение

$$x^3+5x^2+ax+b=0 \Leftrightarrow x^3+5x^2+7x+2=0 \Leftrightarrow (x^2+3x+1)(x+2)=0.$$

У первого сомножителя корни различны, так как дискриминант $D=(-3)^2-4=5>0$.

Это корни — иррациональные, так как иррационален $\sqrt{5}$. Значит, у уравнения есть три различных корня.
Ответ: 7 .

С3. При каком $x \in \{1, 2, 3, \ldots, 98, 99\}$ значение выражения

$$\left(\left(\sqrt{\frac{x+2}{x}}-\sqrt{1-\frac{2}{x+2}}\right):\left(\sqrt{1+\frac{2}{x}}+\sqrt{\frac{x}{x+2}}-2\right)\right):\left(1+\sqrt{\frac{x}{x+2}}\right)$$

ближе всего к 73?

После тождественных преобразований данного выражения, учитывая, что x принимает только натуральные значения, получаем

$$\left(\left(\sqrt{\frac{x+2}{x}}-\sqrt{1-\frac{2}{x+2}}\right):\left(\sqrt{1+\frac{2}{x}}+\sqrt{\frac{x}{x+2}}-2\right)\right):\left(1+\sqrt{\frac{x}{x+2}}\right)=$$
$$=\frac{(x+2)-x}{\sqrt{x(x+2)}}\cdot\frac{\sqrt{x(x+2)}}{(x+2)-2\sqrt{x(x+2)}+x}\cdot\frac{\sqrt{x+2}}{\sqrt{x+2}+\sqrt{x}}=$$
$$=\frac{(x+2)-x}{(\sqrt{x+2}-\sqrt{x})^2}\cdot\frac{\sqrt{x+2}}{\sqrt{x+2}+\sqrt{x}}=\frac{\sqrt{x+2}}{\sqrt{x+2}-\sqrt{x}}=$$
$$=\frac{\sqrt{x+2}(\sqrt{x+2}+\sqrt{x})}{2}=1+\frac{x+\sqrt{x(x+2)}}{2}.$$

Оценим подкоренное выражение $x(x+2)$ сверху и снизу.
Так как $x^2 < x(x+2) < (x+1)^2$, то

$$1+\frac{x+x}{2}<1+\frac{x+\sqrt{x(x+2)}}{2}<1+\frac{x+x+1}{2}.$$

Значит, исходное выражение больше, чем $1+x$ и меньше, чем $1+x+\frac{1}{2}$. Поэтому, при $x=72$ значение этого выражения в интервале $(73; 73{,}5)$. При $x \geq 73$ все значения этого выражения больше 74, а при $x \leq 71$ все значения меньше 72,5.
Ответ: 72.