

**Единый государственный экзамен по математике, 2003 год
демонстрационная версия**

Часть А

А1. Найдите значение выражения $2\sin^2 2\alpha + 2\cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) + 2\cos^2 2\alpha$, при $\alpha = \frac{\pi}{6}$.

1. 0 2. $2 + \sqrt{3}$ 3. 3 4. $2 - \sqrt{3}$

Упростим выражение

$$2\sin^2 2\alpha + 2\cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) + 2\cos^2 2\alpha = 2(\sin^2 2\alpha + \cos^2 2\alpha) + 2\sin \alpha = 2 + 2\sin \alpha.$$

При $\alpha = \frac{\pi}{6}$:

$$2 + 2\sin \frac{\pi}{6} = 2 + 2 \cdot \frac{1}{2} = 3.$$

Правильный ответ: 3.

А2. Упростите выражение $\frac{9\sqrt{m} \cdot \sqrt{m^7}}{m^{-3}}$.

1. $9m^7$ 2. $9m$ 3. 9 4. $9m^{-6}$

$$\frac{9\sqrt{m} \cdot \sqrt{m^7}}{m^{-3}} = 9m^{\frac{1}{2} + \frac{7}{2} - (-3)} = 9m^{4+3} = 9m^7.$$

Правильный ответ: 1.

А3. Сократите дробь $\frac{\sqrt[3]{x} + \sqrt[3]{y}}{\sqrt[3]{x^2} - \sqrt[3]{y^2}}$.

1. $\sqrt[3]{x} - \sqrt[3]{y}$ 2. $\frac{1}{\sqrt[3]{x} - \sqrt[3]{y}}$ 3. $\frac{1}{x - y}$ 4. $x + y$

$$\frac{\sqrt[3]{x} + \sqrt[3]{y}}{\sqrt[3]{x^2} - \sqrt[3]{y^2}} = \frac{\sqrt[3]{x} + \sqrt[3]{y}}{(\sqrt[3]{x} + \sqrt[3]{y})(\sqrt[3]{x} - \sqrt[3]{y})} = \frac{1}{\sqrt[3]{x} - \sqrt[3]{y}}.$$

Правильный ответ: 2.

A4. Найдите значение $\log_3(9b)$, если $\log_3 b = 5$.

1. -8

2. 10

3. 7

4. 25

$$\log_3(9b) = \log_3 9 + \log_3 b = 2 + 5 = 7.$$

Правильный ответ: 3.

A5. Решите уравнение $\cos\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

1. $(-1)^{k-1} \frac{\pi}{6} + \pi k; k \in \mathbb{Z}$

2. $\pm \frac{\pi}{3} + 2\pi k; k \in \mathbb{Z}$

3. $(-1)^{k+1} \frac{\pi}{3} + \pi k; k \in \mathbb{Z}$

4. $(-1)^k \frac{\pi}{3} + \pi k; k \in \mathbb{Z}$

I способ.

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = \frac{\sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{\pi}{2} + x = -\frac{\pi}{6} + 2\pi k, \\ \frac{\pi}{2} + x = \frac{\pi}{6} + 2\pi k; k \in \mathbb{Z} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -\frac{2\pi}{3} + 2\pi k, \\ x = -\frac{\pi}{3} + 2\pi k; k \in \mathbb{Z}. \end{cases}$$

II способ.

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = \frac{\sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow -\sin x = \frac{\sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow \sin x = -\frac{\sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -\frac{\pi}{3} + 2\pi k, \\ x = \frac{4\pi}{3} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}. \end{cases}$$

III способ.

$$\begin{aligned} \cos\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = \frac{\sqrt{3}}{2} &\Leftrightarrow -\sin x = \frac{\sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow \sin x = -\frac{\sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow x = (-1)^k \arcsin\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) + \pi k, k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow x = (-1)^{k+1} \frac{\pi}{3} + \pi k, k \in \mathbb{Z}. \end{aligned}$$

Правильный ответ: 3.

A6. Укажите промежуток, которому принадлежит корень уравнения $\log_2(x+1) = \log_2(3x)$.

1. $(-\infty; -1)$

2. $(-1; 0)$

3. $[-1; 0]$

4. $(0; +\infty)$

Решим уравнение

$$\log_2(x+1) = \log_2(3x) \Leftrightarrow \begin{cases} x+1 > 0, \\ 3x > 0, \\ x+1 = 3x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 0, \\ 2x-1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 0, \\ x = \frac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow x = \frac{1}{2}.$$

Корень принадлежит промежутку $(0; +\infty)$.

Правильный ответ: 4.

A7. Решите неравенство $5^{2-3x} - 1 \geq 0$.

1. $\left(-\infty; \frac{2}{3}\right)$ 2. $\left(-\infty; \frac{2}{3}\right]$ 3. $\left(\frac{2}{3}; +\infty\right)$ 4. $\left[\frac{2}{3}; +\infty\right)$

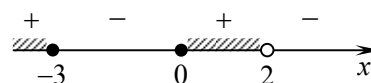
$$5^{2-3x} - 1 \geq 0 \Leftrightarrow 5^{2-3x} \geq 5^0 \underset{5>1}{\Leftrightarrow} 2-3x \geq 0 \Leftrightarrow 3x \leq 2 \Leftrightarrow x \leq \frac{2}{3}.$$

Правильный ответ: 2.

A8. Решите неравенство $\frac{x(x+3)}{2-x} \geq 0$.

1. $(-\infty; 3] \cup (2; +\infty)$ 2. $[-3; 2)$ 3. $(-\infty; 3) \cup [0; 2)$ 4. $(-\infty; -3] \cup [0; 2)$

$$\frac{x(x+3)}{2-x} \geq 0$$



Правильный ответ: 4.

A9. Укажите промежуток, которому принадлежат нули функции $f(x) = \sqrt{4-3x^2} - x$.

1. $[-1; 1)$ 2. $[1; \sqrt{2}]$ 3. $\left[-\frac{4}{3}; 1\right)$ 4. $(\sqrt{2}; 2]$

Решим уравнение

$$\begin{aligned} \sqrt{4-3x^2} - x = 0 &\Leftrightarrow \sqrt{4-3x^2} = x \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 0, \\ 4-3x^2 = x^2 \end{cases} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 0, \\ 4x^2 = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 0, \\ x = -1, \Leftrightarrow x = 1. \end{cases} \end{aligned}$$

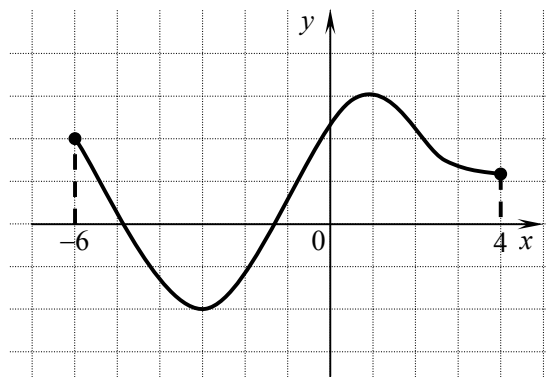
Итак, нуль функции принадлежит промежутку $[1; \sqrt{2}]$.

Правильный ответ: 2.

A10. Функция $y = f(x)$ задана на промежутке $[-6; 4]$. Укажите промежуток, которому принадлежат все точки экстремума.

1. $[-6; 0]$
2. $[0; 4]$
3. $[-2; 3]$
4. $[-3; 1]$

Заданная функция имеет два экстремума, достигаемые в точках -3 и 1 . Обе точки одновременно лежат в 4 промежутке.



Правильный ответ: 4.

A11. Найдите область определения функции $y = \log_{\frac{3}{10}}(x - x^2)$.

1. $[0; 1]$ 2. $(0; 1)$ 3. $(-\infty; 0) \cup (1; +\infty)$ 4. $(-\infty; 0] \cup [1; +\infty)$

Область определения функции задается неравенством $x - x^2 > 0$, решим его:

$$x - x^2 > 0 \Leftrightarrow x^2 - x < 0 \Leftrightarrow x(x - 1) < 0.$$

Правильный ответ: 2.

A12. Найдите множество значений функции $y = \sin x + 2$.

1. $[-1; 1]$ 2. $[0; 2]$ 3. $[1; 3]$ 4. $[2; 3]$

$$-1 \leq \sin x \leq 1 \Leftrightarrow -1 + 2 \leq \sin x + 2 \leq 1 + 2 \Leftrightarrow 1 \leq \sin x + 2 \leq 3.$$

Множество значений функции — отрезок $[1; 3]$.

Правильный ответ: 3.

A13. Укажите график функции, заданной формулой $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$.

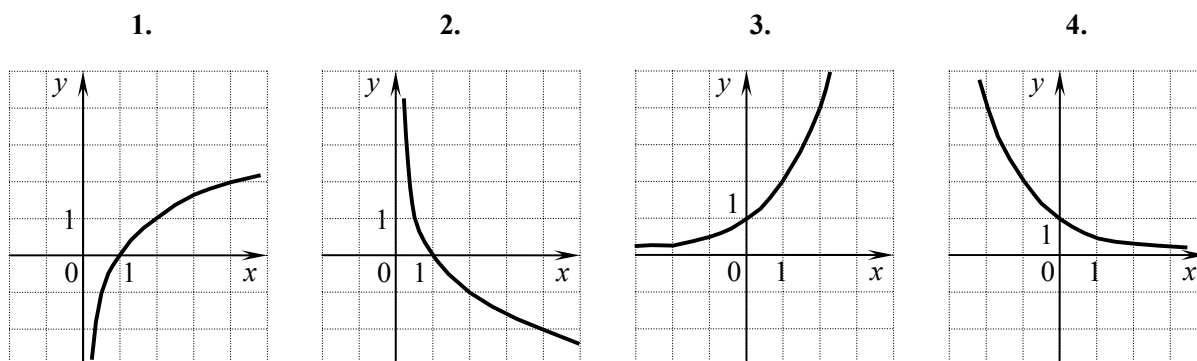


График заданной функции изображен на рисунке 4.
Правильный ответ: 4.

A14. Найдите значение производной функции $y = x \cdot e^x$ в точке $x_0 = 1$.

1. $2e$ 2. e 3. $1 + e$ 4. $2 + e$

Вычислим производную произведения и ее значение при $x = 1$:

$$y' = x' \cdot e^x + x \cdot (e^x)' = e^x + x \cdot e^x;$$

$$y'(1) = e + e = 2e.$$

Правильный ответ: 1.

A15. Для функции $y = 2 \cos x$ найдите первообразную, график которой проходит через точку $M\left(\frac{\pi}{2}; 24\right)$.

1. $Y = 2 \sin x + 24$ 2. $Y = 2 \sin x + 22$ 3. $Y = -2 \sin x + 26$ 4. $Y = 2 \cos x + 22$

Найдем множество первообразных $Y(x)$:

$$Y(x) = 2 \sin x + C.$$

Найдем C :

$$Y\left(\frac{\pi}{2}\right) = 24 \Leftrightarrow 2 \sin \frac{\pi}{2} + C = 24 \Leftrightarrow 2 + C = 24 \Leftrightarrow C = 22.$$

Таким образом, искомая первообразная:

$$Y(x) = 2 \sin x + 22.$$

Правильный ответ: 2.

A16. При движении тела по прямой расстояние S (в метрах) от начальной точки движения изменяется по закону $S(t) = \frac{t^3}{3} - t^2 + t - 1$ (t — время движения в секундах). Найдите скорость (м/с) тела через 4 секунды после начала движения.

1. 1,75 2. 7,5 3. 3 4. 9

$$\begin{aligned} v(t) &= S'(t) = t^2 - 2t + 1 \text{ м/с}; \\ v(4) &= 16 - 8 + 1 = 9 \text{ м/с}. \end{aligned}$$

Правильный ответ: 4.

Часть В

B1. Пусть $(x_0; y_0)$ — решение системы $\begin{cases} \sqrt{25-10x+x^2} + y = 4, \\ y - 3x + 11 = 0. \end{cases}$ Найдите произведение $x_0 \cdot y_0$.

Решим систему

I способ.

$$\begin{aligned} \begin{cases} \sqrt{25-10x+x^2} + y = 4, \\ y - 3x + 11 = 0 \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{25-10x+x^2} + 3x - 11 = 4, \\ y = 3x - 11 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{x^2-10x+25} = 15-3x, \\ y = 3x - 11 \end{cases} \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \begin{cases} 15-3x \geq 0, \\ x^2-10x+25 = (15-3x)^2, \\ y = 3x - 11 \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} x \leq 5, \\ x^2-10x+25 = 225-90x+9x^2, \\ y = 3x - 11 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq 5, \\ x^2-10x+25 = 0, \\ y = 3x - 11 \end{cases} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x \leq 5, \\ x = 5, \\ y = 3x - 11 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 5, \\ y = 3x - 11 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 5, \\ y = 4. \end{cases} \end{aligned}$$

II способ.

$$\begin{cases} \sqrt{25-10x+x^2} + y = 4, \\ y - 3x + 11 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{(5-x)^2} = 4-y, \\ y = 3x-11 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} |5-x| = 15-3x, \\ y = 3x-11. \end{cases}$$

По смыслу задачи $15-3x \geq 0 \Leftrightarrow x \leq 5$, тогда $|5-x| = 5-x$.

Имеем систему

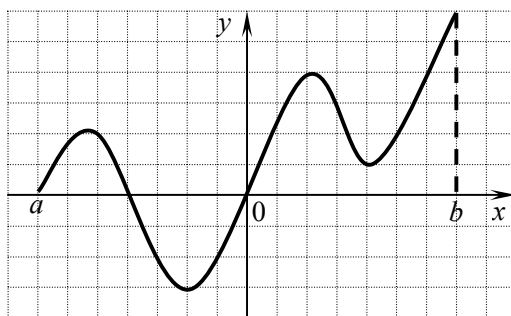
$$\begin{cases} 5-x = 15-3x, \\ y = 3x-11 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 5, \\ y = 4. \end{cases}$$

Таким образом, произведение корней системы равно 20.

Ответ: 20.

B2. Функция $y = f(x)$ задана на отрезке $[a; b]$. На рисунке изображен график ее производной $y = f'(x)$. Исследуйте на монотонность функцию $y = f(x)$. В ответе укажите количество промежутков, на которых функция возрастает.

Промежуткам монотонности функции соответствуют промежутки знакопостоянства ее производной. Производная функции $y = f(x)$ положительна на двух промежутках и отрицательна на одном промежутке. Поэтому количество промежутков, на которых функция возрастает, есть 2.



Замечание. Задание «исследуйте функцию на монотонность» предполагает явное указание промежутков возрастания и убывания функции и является избыточным для ответа на поставленный вопрос.

B3. Найдите значение выражения $\log_{\pi^2} \left(\frac{a^2 b}{\pi^3} \right)$, если $\log_{\pi} \sqrt{a} = 3$ и $\log_{\pi} b = 5$.

I способ.

$$\begin{aligned} \log_{\pi^2} \left(\frac{a^2 b}{\pi^3} \right) &= \log_{\pi^2} (a^2 b) - \log_{\pi^2} \pi^3 = \log_{\pi^2} a^2 + \log_{\pi^2} b - \log_{\pi^2} \pi^3 = \\ &= 2 \log_{\pi} \sqrt{a} + \frac{1}{2} \log_{\pi} b - \frac{3}{2} = 2 \cdot 3 + \frac{1}{2} \cdot 5 - \frac{3}{2} = 7. \end{aligned}$$

II способ.

$$\begin{aligned} \log_{\pi} \sqrt{a} = 3 &\Leftrightarrow \sqrt{a} = \pi^3 \Leftrightarrow a = \pi^6 \Leftrightarrow a^2 = \pi^{12}; \\ \log_{\pi} b = 5 &\Leftrightarrow b = \pi^5. \end{aligned}$$

Тогда

$$\log_{\pi^2} \frac{a^2 b}{\pi^3} = \log_{\pi^2} \frac{\pi^{12} \cdot \pi^5}{\pi^3} = \log_{\pi^2} \pi^{14} = \frac{14}{2} \log_{\pi} \pi = 7.$$

Ответ: 7.

B4. Найдите наименьшее значение функции $y = \sqrt[3]{\sin 2x \cos x + \cos 2x \sin x - 7}$.

Функция минимальна тогда и только тогда, когда

$$\sin 2x \cos x + \cos 2x \sin x - 7 = \sin 3x - 7$$

— минимально, а выражение $\sin 3x - 7$ минимально, когда минимально $\sin 3x$. Тогда

$$\begin{aligned}\min_{\mathbb{R}}(\sin 3x) &= -1; \\ \min_{\mathbb{R}}(\sin 3x - 7) &= -8; \\ \min_{\mathbb{R}}(y(x)) &= \sqrt[3]{-8} = -2.\end{aligned}$$

Ответ: -2 .

В5. Пусть x_0 — наименьший положительный корень уравнения $\cos^2 x - 5 \sin x \cdot \cos x + 2 = 0$.
Найдите $\operatorname{tg} x_0$.

Решим уравнение

$$\begin{aligned}\cos^2 x - 5 \sin x \cdot \cos x + 2 = 0 &\Leftrightarrow \cos^2 x - 5 \sin x \cdot \cos x + 2 \sin^2 x + 2 \cos^2 x = 0 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow 3 \cos^2 x - 5 \sin x \cdot \cos x + 2 \sin^2 x = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \operatorname{tg} x = 1, \\ \operatorname{tg} x = \frac{3}{2}. \end{cases} \end{aligned}$$

$\frac{\pi}{2} + \pi k, k \in \mathbb{Z}$ — не решения

Ответ: $\operatorname{tg} x = 1$.

В6. При каком значении a функция $y = \frac{2^{ax+7}}{2^{x^2}}$ имеет максимум при $x = 4$?

Преобразуем выражение, задающее функцию:

$$y = \frac{2^{ax+7}}{2^{x^2}} = 2^{-x^2+ax+7}.$$

Заданная функция достигает своего максимума в точке, когда достигает максимума квадратный трехчлен $f(x) = -x^2 + ax + 7$. Вершина квадратного трехчлена, соответствующая его экстремальному значению, находится из формулы $x_d = -\frac{b}{2a}$.

Решим уравнение

$$-\frac{a}{-2} = 4 \Leftrightarrow a = 8$$

Таким образом, искомое значение параметра $a = -8$.

Ответ: $a = -8$.

В7. Владелец дискотеки имел стабильный доход. В погоне за увеличением прибыли он повысил цену на билеты на 25%. Количество посетителей резко уменьшилось, и он стал нести убытки. Тогда он вернулся к первоначальной цене билетов. На сколько процентов владелец дискотеки снизил новую цену билетов, чтобы она стала равна первоначальной? (Знак % в ответе не пишете.)

Пусть начальная цена билетов была x . Тогда после повышения цен она стала $x + 0,25x = 1,25x$.

Поскольку после понижения цен цена билетов снова стала x , то есть уменьшилась в $\frac{x}{1,25x} = 0,8$

раза, искомое уменьшение цен составило 20%.

Ответ: 20.

В8. Студенческая бригада подрядилась выложить керамической плиткой пол в зале молодежного клуба площадью 288 м^2 . Приобретая опыт, студенты в каждый последующий день, начиная со второго, выкладывали на 2 м^2 больше, чем в предыдущий, и запасов плитки им хватило ровно на 11 дней работы. Планируя, что производительность труда будет увеличиваться таким же образом, бригадир определил, что для завершения работы понадобится еще 5 дней. Сколько коробок с плитками ему надо заказать, если 1 коробки хватает на $1,2 \text{ м}^2$ пола, а для замены некачественных плиток понадобится 3 коробки?

Для выполнения всей работы потребуется $288 : 1,2 = 240$ коробок плитки, с учетом брака — 243 коробки. Выясним, сколько коробок было израсходовано за 11 дней работы.

Пусть в первый день студенты выложили плиткой $x \text{ м}^2$. Поскольку в каждый следующий день выкладывают на 2 м^2 больше, за все 16 дней работы ими будет выложено (используем формулу суммы арифметической прогрессии)

$$S_{16} = \frac{2x + (16-1) \cdot 2}{2} 16 = (x+15) \cdot 16 \text{ м}^2.$$

Решим уравнение

$$(x+15) \cdot 16 = 288 \Leftrightarrow x+15 = 18 \Leftrightarrow x = 3 \text{ м}^2.$$

Тогда за 11 дней было выложено

$$S_{11} = \frac{2 \cdot 3 + (11-1) \cdot 2}{2} 11 = 143 \text{ м}^2.$$

За последние 5 дней работы осталось выложить $288 - 143 = 145 \text{ м}^2$ пола, на что потребуется $145 : 1,2 = 120,8(3)$ коробки с плиткой. Тогда бригадир достаточно заказать 121, а с учетом замены бракованных плиток — 124 коробки с плиткой.

Ответ: 124.

Примечание. В условии сказано, что изначально имеющейся плитки хватило ровно на 11 дней работы. Поскольку довести нужно 124 коробки, а всего их требуется 243, за 11 дней работы было израсходовано 119 коробок. Но этого количества не могло хватить на выкладывание 143 м^2 пола, поскольку $119 \cdot 1,2 = 142,8$. Если же предположить, что у бригады изначально было в распоряжении 120 коробок, то тогда привезти можно не более 123, и их не хватает на выкладывание оставшейся части пола. Задача некорректна.

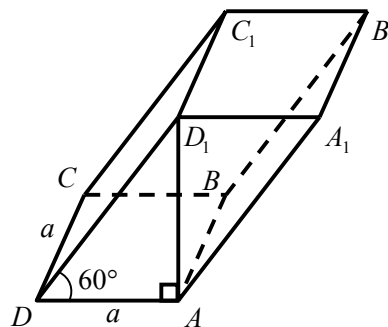
В9. Дана призма $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$, в основании которой лежит квадрат, а боковые ребра наклонены к плоскости основания под углом в 60° . Отрезок $D_1 A$ перпендикулярен плоскости основания.

Найдите длину этого отрезка, если площадь боковой поверхности призмы равна $6(\sqrt{3} + 2)$.

Пусть длина стороны квадрата, лежащего в основании равна a . Заметим, что DA — проекция отрезка DD_1 на плоскость основания. Тогда угол $D_1 D A$ есть угол между боковым ребром и плоскостью основания, и треугольник $D_1 D A$ является прямоугольным, один из углов которого равен 60° . Отсюда

$$D_1 A = a \cdot \operatorname{tg} 60^\circ = a\sqrt{3},$$

$$D_1 D = \frac{a}{\sin 30^\circ} = 2a.$$



Поскольку стороны квадрата взаимно перпендикулярны, и проекция наклонной DD_1 перпендикулярна стороне DC , по теореме о трех перпендикулярах,

наклонная DD_1 также перпендикулярна стороне DC , то есть боковая грань CDD_1C_1 — прямоугольник. Тогда площадь боковой поверхности есть

$$S_{\text{бок.}} = 2(S_{DD_1C_1C} + S_{DD_1A_1A}) = DD_1 \cdot DC + D_1A \cdot AD = 2(2a^2 + a^2\sqrt{3}) = 2(2 + \sqrt{3})a^2.$$

Решим уравнение

$$6(\sqrt{3} + 2) = 2(2 + \sqrt{3})a^2 \Leftrightarrow a^2 = 3 \underset{a>0}{\Leftrightarrow} a = \sqrt{3}.$$

Таким образом,

$$D_1A = a \cdot \operatorname{tg} 60^\circ = a\sqrt{3} = \sqrt{3} \cdot \sqrt{3} = 3.$$

Ответ: 3.

В10. Площадь треугольника ABC равна $20\sqrt{3}$. Найдите AC , если сторона AB равна 8 и она больше половины стороны AC , а медиана BM равна 5.

Пусть длина стороны AC равна x , тогда $AM = MC = 0,5x$, причем $x < 16$.

По теореме косинусов для треугольника ABM :

$$AB^2 = BM^2 + AM^2 - 2BM \cdot AM \cos \alpha,$$

или

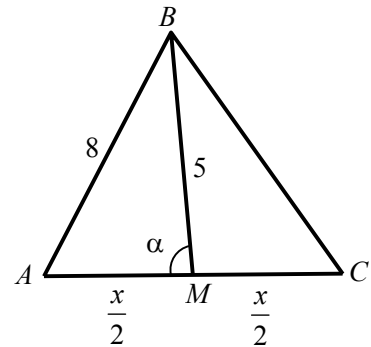
$$\left(\frac{x}{2}\right)^2 + 5^2 - 2 \cdot \frac{x}{2} \cdot 5 \cos \alpha = 8^2 \Leftrightarrow \cos \alpha = \frac{x^2 - 156}{20x}.$$

С другой стороны, медиана делит треугольник на два треугольника равновеликих по площади, и поскольку

$$S_{\triangle ABM} = 0,5 \cdot AM \cdot MC \sin \alpha$$

имеем

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{x}{2} \cdot 5 \sin \alpha = \frac{20\sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow \sin \alpha = \frac{8\sqrt{3}}{x}.$$



По основному тригонометрическому тождеству $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$, или

$$\begin{aligned} \left(\frac{x^2 - 156}{20x}\right)^2 + \left(\frac{8\sqrt{3}}{x}\right)^2 &= 1 \Leftrightarrow \frac{x^4 - 2 \cdot 156x^2 + 156^2}{400x^2} + \frac{192}{x^2} = 1 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow x^4 - 312x^2 + 156^2 + 192 \cdot 400 &= 400x^2 \Leftrightarrow x^4 - 712x^2 + 101136 = 0 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 = 516, \\ x^2 = 196 \end{cases} \underset{x>0}{\Leftrightarrow} \begin{cases} x = \sqrt{516}, \\ x = 14 \end{cases} \underset{x<16}{\Leftrightarrow} x = 14. \end{aligned}$$

Ответ: 14.

Примечание. Укажем другой способ получения уравнения на x . Применим теорему косинусов к треугольникам ABM и CBM .

Из треугольника ABM :

$$\begin{aligned} AB^2 = BM^2 + AM^2 - 2 \cdot BM \cdot AM \cos \alpha &\Leftrightarrow \left(\frac{x}{2}\right)^2 + 5^2 - 2 \cdot 5 \cdot \frac{x}{2} \cos \alpha = 8^2 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \left(\frac{x}{2}\right)^2 - 39 &= 5x \cos \alpha. \end{aligned}$$

Из треугольника CBM :

$$BC^2 = BM^2 + CM^2 - 2 \cdot BM \cdot CM \cos(\pi - \alpha) \Leftrightarrow \left(\frac{x}{2}\right)^2 + 5^2 + 2 \cdot 5 \cdot \frac{x}{2} \cos \alpha = BC^2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 5x \cos \alpha = BC^2 - 25 - \left(\frac{x}{2}\right)^2.$$

Откуда

$$\left(\frac{x}{2}\right)^2 - 39 = BC^2 - 25 - \left(\frac{x}{2}\right)^2 \Leftrightarrow BC^2 = \frac{x^2}{2} - 14 \Leftrightarrow BC = \sqrt{\frac{x^2}{2} - 14}.$$

Найдем полупериметр треугольника ABC : $p = \frac{x+8+\sqrt{\frac{x^2}{2}-14}}{2}.$

Тогда по формуле Герона:

$$S_{\triangle ABC} = \frac{1}{4} \sqrt{\left(x+8+\sqrt{\frac{x^2}{2}-14}\right)\left(-x+8+\sqrt{\frac{x^2}{2}-14}\right)\left(x-8+\sqrt{\frac{x^2}{2}-14}\right)\left(x+8-\sqrt{\frac{x^2}{2}-14}\right)} =$$

$$= \frac{1}{4} \sqrt{\left((x+8)^2 - \left(\frac{x^2}{2}-14\right)\right)\left(\left(\frac{x^2}{2}-14\right) - (x-8)^2\right)} =$$

$$= \frac{1}{4} \sqrt{\left(x^2 + 16x + 64 - \frac{x^2}{2} + 14\right)\left(\frac{x^2}{2} - 14 - x^2 + 16x - 64\right)} = \frac{1}{4} \sqrt{\left(\frac{x^2}{2} + 16x + 78\right)\left(\frac{x^2}{2} + 16x - 78\right)} =$$

$$= \frac{1}{8} \sqrt{(x+6)(x+26)(x-6)(26-x)}.$$

Решим уравнение

$$\frac{1}{8}(x+6)(x+26)(x-6)(26-x) = 20\sqrt{3} \Leftrightarrow (x+6)(x-6)(x+26)(x-26) = -76800 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (x^2 - 36)(x^2 - 676) = -76800 \Leftrightarrow x^4 - 712x^2 + 101136 = 0.$$

Далее как ранее.

Часть С

С1. Решите уравнение $2\log_{12}\left(x + \frac{6}{x-5}\right) = \log_{12}\left(\frac{3}{x-2} - \frac{2}{x-3}\right) + 3.$

$$2\log_{12}\left(x + \frac{6}{x-5}\right) = \log_{12}\left(\frac{3}{x-2} - \frac{2}{x-3}\right) + 3 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x + \frac{6}{x-5} > 0 \\ \log_{12}\left(x + \frac{6}{x-5}\right)^2 = \log_{12}\left(\left(\frac{3}{x-2} - \frac{2}{x-3}\right) \cdot 12^3\right) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + \frac{6}{x-5} > 0 \\ \left(\frac{x^2 - 5x + 6}{x-5}\right)^2 = 12^3 \cdot \frac{3(x-3) - 2(x-2)}{(x-2)(x-3)} \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{x^2 - 5x + 6}{x - 5} > 0, \\ \left(\frac{x^2 - 5x + 6}{x - 5} \right)^2 = 12^3 \cdot \frac{x - 5}{x^2 - 5x + 6}. \end{cases}$$

Пусть $\frac{x^2 - 5x + 6}{x - 5} = t$.

Решим систему

$$\begin{cases} t > 0, \\ t^2 = 12^3 \cdot \frac{1}{t} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t > 0, \\ t^3 = 12^3 \end{cases} \Leftrightarrow t = 12.$$

Таким образом,

$$\begin{aligned} \frac{x^2 - 5x + 6}{x - 5} = 12 &\Leftrightarrow \begin{cases} x - 5 \neq 0, \\ x^2 - 5x + 6 = 12(x - 5) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq 5, \\ x^2 - 17x + 66 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x \neq 5, \\ \begin{cases} x = 6, \\ x = 11 \end{cases} \end{cases} \end{aligned}$$

Ответ: $\{6; 11\}$.

С2. При каких значениях параметра n уравнение $15 \cdot 10^x - 20 = n - n \cdot 10^{x+1}$ не имеет корней?

Видно, что $x = -1$ — не корень для любого n .

$$15 \cdot 10^x - 20 = n - n \cdot 10^{x+1} \Leftrightarrow 15 \cdot 10^x - 20 = n(1 - 10^{x+1}) \Leftrightarrow$$

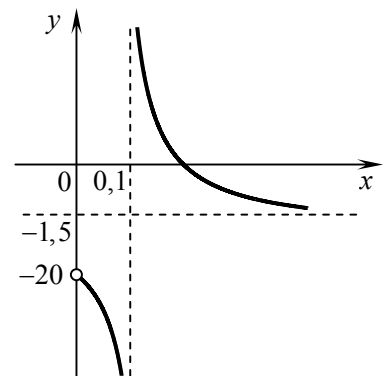
$$\Leftrightarrow n = \frac{15 \cdot 10^x - 20}{1 - 10^x \cdot 10}.$$

$\begin{matrix} \Leftrightarrow \\ x = -1 - \\ \text{не решение} \end{matrix}$

Пусть $t = 10^x$, $t \in (0; +\infty)$.

Тогда пусть

$$f(t) = \frac{15t - 20}{1 - 10t} = -\frac{\left(15t - \frac{3}{2}\right) - 18,5}{10t - 1} = -1,5 + \frac{18,5}{10t - 1}.$$



Ответ: уравнение не имеет корней при $n \in [-20; -1,5]$.

С3. Основание пирамиды $MABCD$ — ромб $ABCD$, в котором $\angle A = 60^\circ$. Все двугранные углы при ребрах основания пирамиды равны. Плоскость α , параллельная плоскости основания пирамиды, пересекает высоту MO пирамиды в точке P так, что $\frac{MP}{PO} = \frac{2}{3}$. В образовавшуюся усеченную пирамиду вписан цилиндр, ось которого лежит на высоте пирамиды, а верхнее основание вписано в сечение пирамиды плоскостью α . Найдите объем пирамиды, если объем цилиндра равен $9\pi\sqrt{3}$.

Поскольку $\frac{MP}{PO} = \frac{2}{3}$, имеем:

$$\frac{MP}{MO} = \frac{2}{5}, \quad \frac{h_{\text{цилиндра}}}{H_{\text{ромба}}} = \frac{MO}{PO} = \frac{5}{3}.$$

Пусть сторона ромба, являющегося сечением, равна a , радиус вписанной в него окружности равен r . Поскольку острый угол ромба равен 60° , имеем

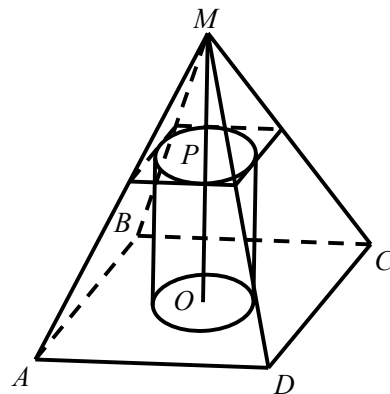
$$a = \frac{2r}{\sin 60^\circ}. \text{ Тогда площадь этого ромба есть}$$

$$S_{\text{ромба}} = a^2 \sin 60^\circ = \frac{4r^2}{\sin^2 60^\circ} \sin 60^\circ = \frac{8}{\sqrt{3}} r^2.$$

Поскольку сечение подобно основанию с коэффициентом

$$\frac{MP}{MO} = \frac{2}{5}, \text{ можно вычислить площадь основания:}$$

$$S_{\text{основания}} = \left(\frac{5}{2}\right)^2 S_{\text{ромба}} = \frac{25}{4} \cdot \frac{8r^2}{\sqrt{3}} = \frac{50}{\sqrt{3}} r^2.$$



Объем пирамиды есть

$$\begin{aligned} V_{\text{пирамиды}} &= \frac{1}{3} S_{\text{основания}} \cdot H_{\text{пирамиды}} = \frac{1}{3} \cdot \frac{50}{\sqrt{3}} r^2 \cdot \frac{5}{3} h_{\text{цилиндра}} = \frac{250}{9\sqrt{3}\pi} \pi r^2 h_{\text{цилиндра}} = \\ &= \frac{250}{9\sqrt{3}\pi} V_{\text{цилиндра}} = \frac{250}{9\sqrt{3}\pi} \cdot 9\sqrt{3}\pi = 250. \end{aligned}$$

Ответ: 250.

С4. Найдите все положительные значения параметра a , при которых в области определения функции $y = (a^x - a^{ax+2})^{-\frac{1}{2}}$ есть двузначные натуральные числа, но нет ни одного трехзначного натурального числа.

По смыслу задачи $a > 0$, область определения функции задается неравенством

$$a^x - a^{ax+2} > 0 \Leftrightarrow a^x > a^{ax+2}.$$

1. При $a = 1$: имеем $1 > 1$, это неверно. Тем самым область определения пуста.

2. При $a > 1$: $x > ax + 2 \Leftrightarrow (a-1)x < -2 \Leftrightarrow x < -\frac{2}{a-1}$. На рассматриваемой области значений параметра левая часть неравенства отрицательна, и ему не удовлетворяют никакие двузначные натуральные числа.

3. При $0 < a < 1$: $x < ax + 2 \Leftrightarrow x < \frac{2}{1-a}$.

Тогда

$$\begin{aligned} 10 < \frac{2}{1-a} \leq 100 &\Leftrightarrow \frac{1}{100} \leq \frac{1-a}{2} < \frac{1}{10} \Leftrightarrow \frac{2}{100} \leq 1-a < \frac{2}{10} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow -\frac{49}{50} \leq -a < -\frac{4}{5} \Leftrightarrow \frac{4}{5} < a \leq \frac{49}{50}. \end{aligned}$$

Ответ: $a \in (0,8; 0,98]$.