Единый государственный экзамен по математике, 2004 год демонстрационная версия

Часть A

A1. Вычислите $25^{\frac{3}{2}} - \frac{1}{4}$.

1. $37\frac{1}{4}$ **2.** $14\frac{3}{4}$ **3.** $124\frac{3}{4}$ **4.** $26\frac{1}{4}$

$$25^{\frac{3}{2}} - \frac{1}{4} = \sqrt{25^3} - \frac{1}{4} = 25\sqrt{25} - \frac{1}{4} = 25 \cdot 5 - \frac{1}{4} = 125 - \frac{1}{4} = 124\frac{3}{4}.$$

Правильный ответ: 3.

A2. Упростите выражение $3\cos^2 x + 3\sin^2 x - 6$.

1. 1 **2.** -5 **3.** 3 **4.** -3

$$3\cos^2 x + 3\sin^2 x - 6 = 3(\cos^2 x + \sin^2 x) - 6 = 3 - 6 = -3.$$

Правильный ответ: 4.

A3. Упростите выражение $\sqrt[4]{625m^8}$.

1. $25m^2$ **2.** $5m^2$ **3.** $-25m^2$ **4.** $-5m^2$

$$\sqrt[4]{625m^8} = \sqrt[4]{(5m^2)^4} = |5m^2| = 5m^2.$$

Правильный ответ: 2.

A4. Найдите значение выражения $\left(\frac{3}{10}\right)^{\log_{\frac{3}{10}} 2} - 5$.

1. $-4{,}91$ **2.** $-4{,}7$ **3.** -4 **4.** -3

$$\left(\frac{3}{10}\right)^{\log_{\frac{3}{10}} 2} - 5 = 2^{\log_{\frac{3}{10}} \frac{3}{10}} - 5 = 2 - 5 = -3.$$

Правильный ответ: 4.

A5. Укажите промежуток, содержащий корень уравнения $7^{5x+6}=49$.

1. $[-4;\,-1)$ **2.** $[-1;\,0]$ **3.** $(0;\,2)$ **4.** $[5;\,9]$

Решим уравнение

$$7^{5x+6}=49 \Leftrightarrow 7^{5x+6}=7^2 \Leftrightarrow 5x+6=2 \Leftrightarrow 5x=-4 \Leftrightarrow x=-\frac{4}{5}.$$

Итак, корень уравнения принадлежит промежутку $[-1;\,0]$.
Правильный ответ: 2.

A6. Какому промежутку принадлежит корень уравнения $\log_2(x+8)=\log_2 3+\log_2 5$.

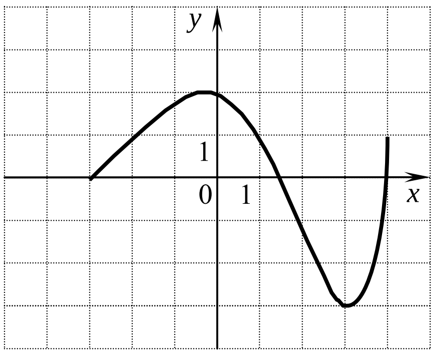
1. $(-8;\,5]$ **2.** $(-1;\,3)$ **3.** $(3;\,5)$ **4.** $[5;\,8]$

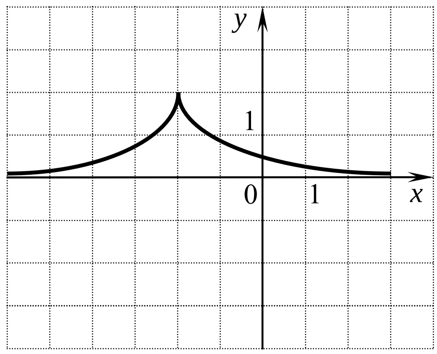
Решим уравнение

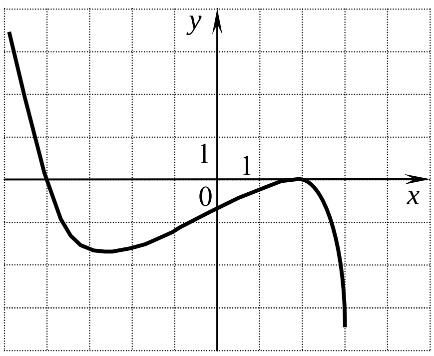
$$\log_2(x+8)=\log_2 3+\log_2 5 \Leftrightarrow \log_2(x+8)=\log_2 15 \Leftrightarrow x+8=15 \Leftrightarrow x=7.$$

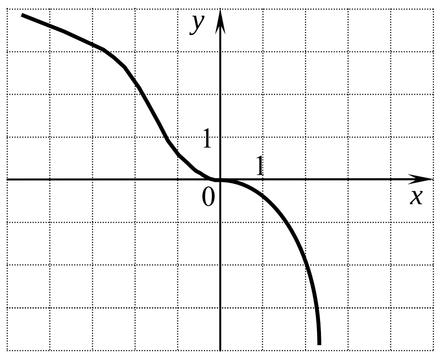
Итак, корень уравнения принадлежит промежутку $[5;\,8]$.
Правильный ответ: 4.

A7. Укажите график функции, возрастающей на отрезке $[-3;\,2]$.

1.


2.


3.


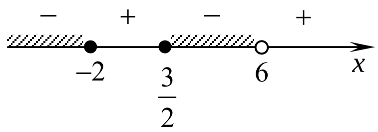
4.


Этот график изображен на рисунке 3.
Правильный ответ: 3.

A8. Укажите множество решений неравенства $\frac{(2x-3)(x+2)}{x-6} \le 0$.

1. $(-\infty; -2] \cup \left[\frac{3}{2}; 6\right)$ **2.** $\left(-\infty; -\frac{3}{2}\right] \cup [2; 6)$ **3.** $(-\infty; -2] \cup [3; 6)$ **4.** $\left[-2; \frac{3}{2}\right] \cup (6; +\infty)$

Решим неравенство $\frac{(2x-3)(x+2)}{x-6} \le 0$ методом интервалов.



Правильный ответ: 1.

A9. Вычислите значение производной функции $y = \sin x - 2x$ в точке $x_0 = 0$.

1. 1 **2.** 0 **3.** –3 **4.** –1

$$y' = \cos x - 2.$$
$$y' = \cos 0 - 2 = 1 - 2 = -1.$$

Правильный ответ: 4.

A10. Найдите область определения функции $y = \sqrt[6]{1 - \log_{0,7} x}$.

1. $[0,7; +\infty)$ **2.** $(0; 0,7]$ **3.** $(-\infty; 0,7]$ **4.** $(0,7; +\infty)$

Область определения функции задается неравенством $1 - \log_{0,7} x \ge 0$

$$1 - \log_{0,7} x \ge 0 \Leftrightarrow \log_{0,7} x \le 1 \underset{0,7<1}{\Leftrightarrow} x \ge 0,7^1 \Leftrightarrow x \ge \frac{7}{10}.$$

Правильный ответ: 1.

A11. Найдите множество значений функции $y = 6^x - 12$.

1. $(0; +\infty)$ **2.** $(-12; +\infty)$ **3.** $[-12; +\infty)$ **4.** $(-\infty; -12)$

$$0 < 6^x < \infty \Leftrightarrow -12 < 6^x - 12 < \infty.$$

Правильный ответ: 2.

A12. Решите уравнение $\cos 2x = -\frac{1}{2}$.

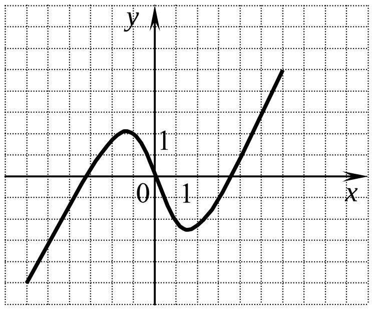
1. $(-1)^k \frac{\pi}{3} + \pi k;\ k \in \mathbb{Z}$ **2.** $\pm\frac{\pi}{3} + \pi k;\ k \in \mathbb{Z}$

3. $\frac{\pi}{3} + \pi k;\ k \in \mathbb{Z}$ **4.** $\pm\frac{\pi}{3} + 2\pi k;\ k \in \mathbb{Z}$

Справедлив переход:

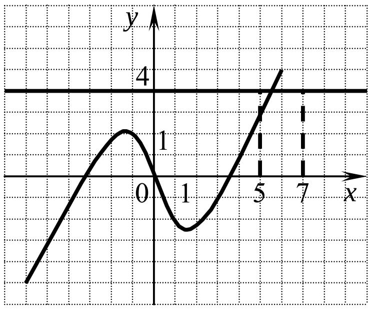
$$\cos 2x = -\frac{1}{2} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 2x = \frac{2\pi}{3} + 2\pi k, \\ 2x = -\frac{2\pi}{3} + 2\pi k;\ k \in \mathbb{Z} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \frac{\pi}{3} + \pi k, \\ x = -\frac{\pi}{3} + \pi k;\ k \in \mathbb{Z}. \end{array}\right.$$

Правильный ответ: 2.



A13. На рисунке изображен график функции $y = f(x)$. Какому из следующих промежутков принадлежит корень уравнения $f(x) = 4$?

1. $(-6; -4)$
2. $(5; 7)$
3. $(-2; 0)$
4. $(0; 2)$



Из рисунка видно, что корень уравнения принадлежит промежутку $(5; 7)$.

Правильный ответ: 2.

A14. Через точку графика функции $y = e^x - x^2$ с абсциссой $x_0 = 1$ проведена касательная. Найдите тангенс угла наклона этой касательной к оси абсцисс.

Значение производной функции в точке равно угловому коэффициенту касательной к графику функции в этой точке, а он, тем самым, равен тангенсу угла наклона этой касательной к оси абсцисс.

1. $e-2$	**2.** -1	**3.** $e-1$	**4.** -2

$$y' = e^x - 2x.$$

$$\operatorname{tg}\alpha = y'(1) = e^1 - 2\cdot 1 = e - 2.$$

Правильный ответ: 1.

Часть B

B1. Найдите значение выражения $\cos 15°(\cos 50° \cdot \sin 65° - \cos 65° \cdot \sin 50°)$.

$$\cos 15°(\cos 50° \cdot \sin 65° - \cos 65° \cdot \sin 50°) = \cos 15°(\sin 65° \cdot \cos 50° - \cos 65° \cdot \sin 50°) =$$

$$= \cos 15° \cdot \sin(65° - 50°) = \cos 15° \cdot \sin 15° = \frac{1}{2}\sin 30° = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2} = \frac{1}{4}.$$

Ответ: $\frac{1}{4}$.

B2. Найдите сумму корней уравнения $(3^{2x^2-29}-27)\sqrt[4]{5x+18}=0$.

$$(3^{2x^2-29}-27)\sqrt[4]{5x+18}=0 \Leftrightarrow \begin{cases} 5x+18\ge 0, \\ \left[\begin{array}{l} 3^{2x^2-29}-27=0, \\ 5x+18=0 \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\ge -\dfrac{18}{5}, \\ \left[\begin{array}{l} 3^{2x^2-29}=3^3, \\ x=-\dfrac{18}{5} \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x\ge -\dfrac{18}{5}, \\ \left[\begin{array}{l} 2x^2-29=3, \\ x=-\dfrac{18}{5} \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\ge -\dfrac{18}{5}, \\ \left[\begin{array}{l} x^2=16, \\ x=-\dfrac{18}{5} \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\ge -\dfrac{18}{5}, \\ \left[\begin{array}{l} x=-4, \\ x=-\dfrac{18}{5}, \\ x=4 \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-\dfrac{18}{5}, \\ x=4. \end{array}\right.$$

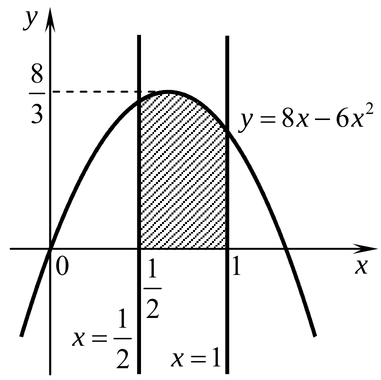
Ответ: $\left\{-\dfrac{18}{5};\ 4\right\}$.

B3. Найдите площадь фигуры, ограниченной линиями $y=8x-6x^2$, $x=\dfrac{1}{2}$, $x=1$, $y=0$.

$$S=\int_{\frac{1}{2}}^{1}(8x-4x^2)dx=\left(4x^2-\frac{4}{3}x^3\right)\Bigg|_{\frac{1}{2}}^{1}=$$

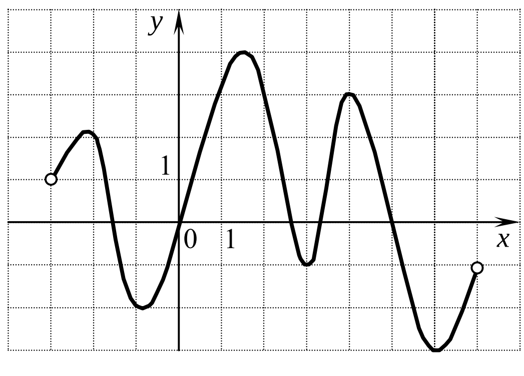
$$=4\left(1^2-\left(\frac{1}{2}\right)^2\right)-\frac{4}{3}\left(1^3-\left(\frac{1}{2}\right)^3\right)=4\left(1-\frac{1}{4}\right)-\frac{4}{3}\left(1-\frac{1}{8}\right)=$$

$$=4-1-\frac{4}{3}+\frac{1}{6}=\frac{18}{6}-\frac{8}{6}+\frac{1}{6}=\frac{11}{6}.$$



Ответ: $\dfrac{11}{6}$.

B4. Функция $y=f(x)$ определена на промежутке $(-3;\,7)$. График ее производной изображен на рисунке. Укажите число точек минимума функции $y=f(x)$ на промежутке $(-3;\,7)$.



Точки, где производная функции обращается в нуль, меняя при этом знак с «минуса» на «плюс» являются точками минимума этой функции. Таким образом, точками минимума являются $x=0$ и $x=3{,}2$. Всего точек минимума две.

Ответ 2.

B5. Найдите наибольшее значение функции $y = \dfrac{40}{2^x + 3^x}$ на промежутке $[1; 7]$.

Числитель дроби — неотрицательная величина, а знаменатель принимает только положительные значения. Функция $2^x + 3^x$ — монотонно возрастающая функция и принимает наименьшее значение только при наименьшем значении аргумента. Итак, наибольшее значение функция принимает при $x = 1$: $y_{\text{НБ}} = y(1) = \dfrac{40}{2^1 + 3^1} = 8$.

Ответ: 8.

B6. Найдите сумму всех целых чисел, входящих в область определения функции $y = \ln(x - 2|x-3|)$.

Область определения функции задается неравенством:

$$x - 2|x-3| > 0 \Leftrightarrow 2|x-3| < x \Leftrightarrow \begin{cases} 2(x-3) < x, \\ 2(x-3) > -x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x < 6, \\ x > 2 \end{cases} \Leftrightarrow 2 < x < 6.$$

Сумма целых чисел из промежутка $(2; 6)$ равна: $3 + 4 + 5 = 12$.

Ответ: 12.

B7. Планируя выпуск нового электронного прибора, экономисты предприятия определили, что в первый месяц может быть изготовлено 200 приборов. Далее предполагалось ежемесячно увеличивать выпуск на 20 изделий. За сколько месяцев предприятие сможет изготовить по этому плану 11000 приборов?

Увеличение выпуска изделий описывается арифметической прогрессией с первым членом $a_1 = 200$ и разностью $d = 20$. Пусть сумма ее первых членов равна

$$\frac{2a_1 + (n-1)d}{2} \cdot n = \frac{400 + (n-1) \cdot 20}{2} \cdot n = 200n + 10(n-1)n = 10n^2 + 190n.$$

Решим уравнение

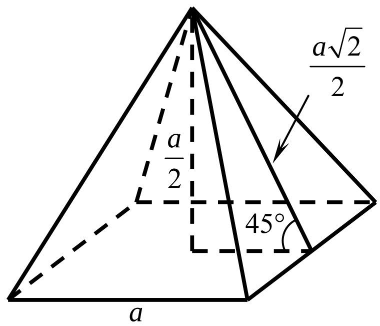
$$10n^2 + 190n = 11000 \Leftrightarrow n^2 + 19n = 1100 \Leftrightarrow n^2 + 19n - 1100 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} n = \dfrac{-19 - 69}{2}, \\ n = \dfrac{-19 + 69}{2} \end{array} \right. \underset{n \in \mathbb{N}}{\Leftrightarrow} n = 25.$$

Таким образом, 11000 приборов предприятие изготовит за 25 месяцев.

Ответ: 25 месяцев.

B8. Двугранные углы при основании правильной четырехугольной пирамиды равны $45°$, а площадь боковой поверхности равна $36\sqrt{2}$. Найдите объем пирамиды.



Пусть сторона основания пирамиды равна a. Поскольку пирамиды правильная и величины двугранных углов при основании равны $45°$, ее апофема есть $0{,}5a\sqrt{2}$ (см. рисунок), и площадь боковой поверхности есть

$$S_{\text{б. п.}} = P_{\text{осн.}} \cdot h = 2a \cdot \frac{a\sqrt{2}}{2} = a^2\sqrt{2}.$$

Решим уравнение

$$a^2\sqrt{2}=36\sqrt{2}\Leftrightarrow a^2=36\underset{a>0}{\Leftrightarrow}a=6\,.$$

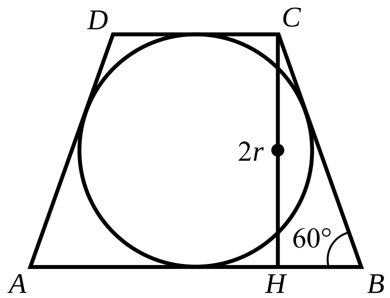
Тогда

$$V=\frac{1}{3}S_{\text{осн.}}\cdot H=\frac{1}{3}a^2\cdot\frac{a}{2}=\frac{a^3}{6}\bigg|_{a=6}=\frac{216}{6}=36\,.$$

Ответ: 36.

В9. В равнобедренную трапецию, один из углов которой равен 60°, а площадь равна $24\sqrt{3}$, вписана окружность. Найдите радиус этой окружности.

1. Пусть радиус вписанной окружности равен *r*, тогда высота трапеции есть $2r$, а ее боковая сторона из треугольника *CHB* есть:



$$|CB|=\frac{2r}{\sin 60^\circ}=\frac{4}{\sqrt{3}}r\,.$$

2. Поскольку окружность вписана в четырехугольник, сумма длин его противоположных сторон равна:

$$|AB|+|CD|=|AD|+|CB|=\frac{8}{\sqrt{3}}r\,.$$

3. Так как

$$S_{\text{тр.}}=\frac{1}{2}(|AB|+|CD|)\cdot|CH|=\frac{1}{2}\cdot\frac{8}{\sqrt{3}}r\cdot 2r=\frac{8}{\sqrt{3}}r^2\,.$$

Решим уравнение

$$\frac{8}{\sqrt{3}}r^2=24\sqrt{3}\Leftrightarrow\frac{r^2}{\sqrt{3}}=3\sqrt{3}\Leftrightarrow r^2=9\underset{r>0}{\Leftrightarrow}r=3\,.$$

Итак, искомый радиус равен 3.

Ответ: 3.

Часть С

С1. Решите систему уравнений $\begin{cases}\log_{0,9}(2y-3x+1)=0,\\ \dfrac{1}{2}\log_2\left(3y-x-\dfrac{3}{2}\right)+\log_4(8x)=0.\end{cases}$

$$\begin{cases}\log_{0,9}(2y-3x+1)=0,\\ \dfrac{1}{2}\log_2\left(3y-x-\dfrac{3}{2}\right)+\log_4(8x)=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\log_{0,9}(2y-3x+1)=0,\\ \log_4\left(3y-x-\dfrac{3}{2}\right)+\log_4(8x)=0\end{cases}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}8x>0,\\ 2y-3x+1=1,\\ \left(3y-x-\dfrac{3}{2}\right)\cdot 8x=1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x>0,\\ y=\dfrac{3}{2}x,\\ 24xy-8x^2-12x=1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x>0,\\ y=\dfrac{3}{2}x,\\ 28x^2-12x-1=0\end{cases}\Leftrightarrow$$

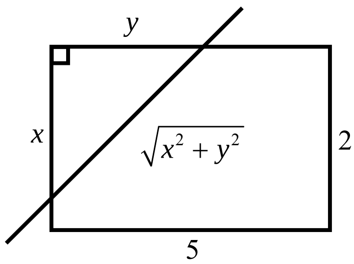
$$\Leftrightarrow \begin{cases} x > 0, \\ y = \dfrac{3}{2}x, \\ \left[\begin{array}{l} x = -\dfrac{1}{14}, \\ x = \dfrac{1}{2} \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \dfrac{1}{2}, \\ y = \dfrac{3}{2}x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \dfrac{1}{2}, \\ y = \dfrac{3}{4}. \end{cases}$$

Ответ: $\left\{\left(\dfrac{1}{2}; \dfrac{3}{4}\right)\right\}$.

С2. Стороны прямоугольника равны 2 и 5. Через каждую точку на его меньшей стороне провели прямую, отсекающую прямоугольный треугольник с периметром 8. Найдите наименьшее значение площади оставшейся части прямоугольника.

Периметр отсекаемого прямоугольного треугольника равен $x + y + \sqrt{x^2 + y^2}$.

Решим уравнение



$$x + y + \sqrt{x^2 + y^2} = 8 \Leftrightarrow \sqrt{x^2 + y^2} = 8 - (x + y) \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow x^2 + y^2 = 64 + x^2 + y^2 - 16x - 16y - 2xy \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow 32 = 8x + 8y + xy \Leftrightarrow y = \frac{32 - 8x}{8 + x} \Leftrightarrow y = 8 \cdot \frac{4 - x}{8 + x}.$$

Так как площадь прямоугольника равна 10, то площадь оставшейся части будет равна:

$$S = 10 - \frac{1}{2}xy = 10 - \frac{1}{2}x \cdot \frac{32 - 8x}{8 + x} = 10 + \frac{4x^2 - 16x}{8 + x};$$
$$S' = (10)' + \frac{(4x^2 - 16x)'(8 + x) - (8 + x)'(4x^2 - 16x)}{(8 + x)^2} =$$
$$= \frac{(8x - 16)(8 + x) - (4x^2 - 16x)}{(8 + x)^2} = \frac{4x^2 + 64x - 128}{(8 + x)^2}.$$
$$S' = 0 \Leftrightarrow \frac{4x^2 + 64x - 128}{(8 + x)^2} = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq -8, \\ x^2 + 16x - 32 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \neq -8, \\ \left[\begin{array}{l} x = -8 - 4\sqrt{6}, \\ x = -8 + 4\sqrt{6} \end{array}\right. \end{cases} \underset{x>0}{\Leftrightarrow} x = 4\sqrt{6} - 8.$$

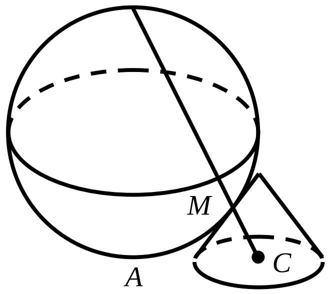
Таким образом,

$$S = 10 + \frac{4(4\sqrt{6} - 8)^2 - 16(4\sqrt{6} - 8)}{8 + (4\sqrt{6} - 8)} = \frac{192 - 70\sqrt{6}}{\sqrt{6}}.$$

Ответ: наименьшее значение площади равно $\dfrac{192 - 70\sqrt{6}}{\sqrt{6}}$.

С3. Сфера радиуса 2 касается плоскости в точке *A*. В этой же плоскости лежит основание конуса. Прямая, проходящая через центр основания конуса (точку *C*) и точку сферы, диаметрально противоположную точке *A*, проходит через точку *M*. Точка *M* является точкой касания сферы и конуса (их единственная общая точка). Найдите высоту конуса, если $AC = 1$.

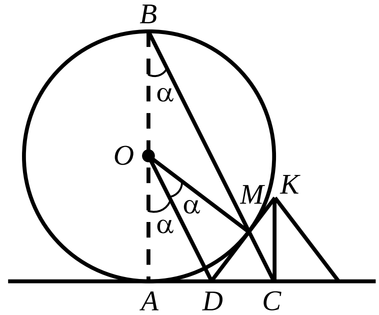
Пусть точка *B* — точка диаметрально противоположная точке *A*. Рассмотрим сечение, проходящее через точки *A*, *B* и *C*.



Пусть $\widehat{ABM} = \alpha$, тогда $\overset{\smile}{AM} = 2\alpha$ и $\widehat{AOM} = 2\alpha$.

Так как $\triangle AOD = \triangle MOD$:

$$\widehat{ODA} = \widehat{MDA} = \alpha \Rightarrow \widehat{ODC} = \pi - \alpha \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \widehat{MDC} = \widehat{ODC} - \widehat{ODM} = \pi - \alpha - \alpha = \pi - 2\alpha \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \widehat{MDC} = \pi - (\pi - 2\alpha) = 2\alpha .$$



Пусть *K* — вершина конуса, тогда *KC* — его высота

$$|KC| = |CD| \cdot \operatorname{tg} 2\alpha = (AC - AD) \operatorname{tg} 2\alpha = (1 - |AD|) \operatorname{tg} 2\alpha .$$

Из треугольника *OAD*:

$$|AD| = |OA| \cdot \operatorname{tg} \alpha = 2 \operatorname{tg} \alpha .$$

Из треугольника *ABC*:

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{|AC|}{|AB|} = \frac{1}{4}.$$

Таким образом,

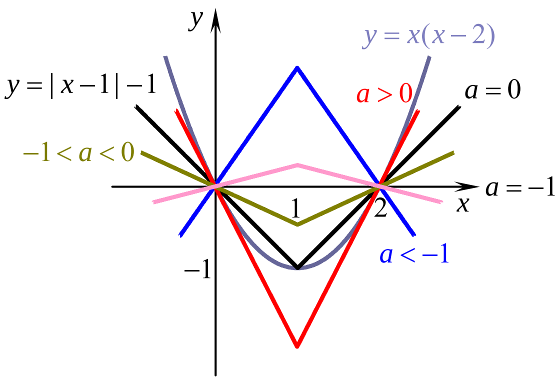
$$|KC| = (1 - 2\operatorname{tg}\alpha)\operatorname{tg} 2\alpha = (1 - 2\operatorname{tg}\alpha)\frac{2\operatorname{tg}\alpha}{1 - \operatorname{tg}^2 \alpha} =$$

$$= \left(1 - 2 \cdot \frac{1}{4}\right) \cdot \frac{2 \cdot \frac{1}{4}}{1 - \left(\frac{1}{4}\right)^2} = \frac{1}{2} \cdot \frac{\frac{1}{2}}{\frac{15}{16}} = \frac{4}{15}.$$

Ответ: $\frac{4}{15}$.

С4. Найдите все значения параметра *a*, при которых множество решений неравенства $x(x-2) \le (a+1)(|x-1|-1)$ содержит все члены некоторой бесконечно убывающей геометрической прогрессии с первым членом, равным $1,7$, и положительным знаменателем.

Члены описанной в условии прогрессии будут бесконечно приближаться к нулю, оставаясь положительными. Это означает, что множество решений неравенства должно содержать отрезок $[0; 1,7]$, т. е. на отрезке $[0; 1,7]$ график функции $y = x(x-2)$ должен быть расположен не выше графика функции $y = |x-1|-1$. Множитель $a+1$ задает сжатие или растяжение графика функции $y = |x-1|-1$, как показано на рисунке. Отсюда ответ: $a \ge 0$.



Ответ: $a \ge 0$.