Единый государственный экзамен по математике, 2005 год демонстрационная версия

Часть А

A1. Вычислите $-15\cdot 81^{\frac{1}{4}}-19$.

1. -154 **2.** 116 **3.** -64 **4.** 26

$$-15\cdot 81^{\frac{1}{4}}-19=-15\cdot 3-19=-64.$$

Правильный ответ: 3.

A2. Упростите выражение $\sqrt[3]{25b^2}\cdot\sqrt[3]{5b^4}$.

1. $5b^2$ **2.** $25b$ **3.** $\sqrt[3]{5b^2}$ **4.** $5b$

$$\sqrt[3]{25b^2}\cdot\sqrt[3]{5b^4}=\sqrt[3]{125b^6}=\sqrt[3]{(5b^2)^3}=5b^2.$$

Правильный ответ: 1.

A3. Найдите значение выражения $\log_5 b$, если $\log_5 b^4=16$.

1. 64 **2.** 2 **3.** 12 **4.** 4

$$\log_5 b^4=16\Leftrightarrow 4\log_5 b=16\Leftrightarrow \log_5 b=4.$$

Правильный ответ: 4.

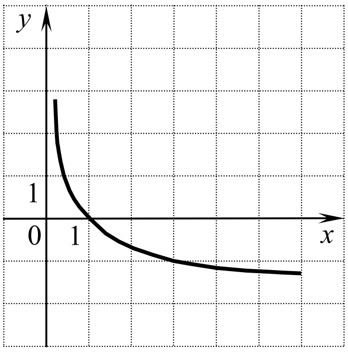
A4. Найдите значение $\operatorname{tg}\alpha$, если $\cos\alpha=\frac{1}{\sqrt5}$ и $-\frac{\pi}{2}<\alpha<0$.

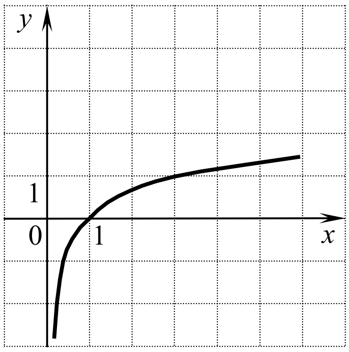
1. $\frac{1}{2}$ **2.** 2 **3.** $-\frac{1}{2}$ **4.** -2

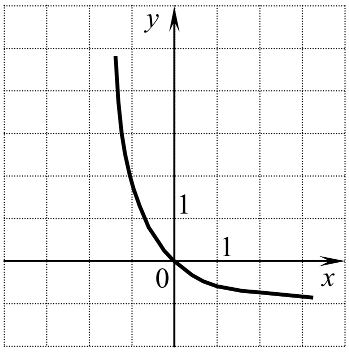
$$\operatorname{tg}\alpha=\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}=\frac{-\sqrt{1-\cos^2\alpha}}{\cos\alpha}=-\frac{\sqrt{1-\left(\frac{1}{\sqrt5}\right)^2}}{\frac{1}{\sqrt5}}=-\frac{\sqrt{1-\frac{1}{5}}}{\frac{1}{\sqrt5}}=-\frac{\sqrt{\frac{4}{5}}}{\frac{1}{\sqrt5}}=-\frac{2}{\sqrt5}:\frac{1}{\sqrt5}=-2.$$

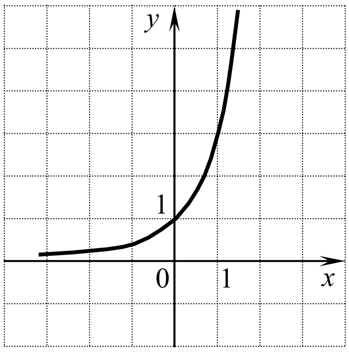
Правильный ответ: 4.

A5. На одном из рисунков изображен график функции $y = \log_3 x$. Укажите этот рисунок.

1. 

2. 

3. 

4. 

Правильный ответ: 2.

A6. Найдите производную функции $y = e^x + 3x^2$.

1.	$y' = xe^{x-1} + 6x$	**2.**	$y' = e^x + x^3$
3.	$y' = e^x + 5x^2$	**4.**	$y' = e^x + 6x$

$$y' = e^x + 6x.$$

Правильный ответ: 4.

A7. Какое из следующих чисел входит в множество значений функции $y = 2^x + 4$?

1. 5 **2.** 2 **3.** 3 **4.** 4

$$0 < 2^x < +\infty \Leftrightarrow 4 < 2^x + 4 < +\infty,$$

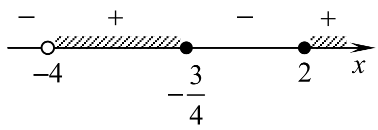
итак, множество значений функции: $(4; +\infty)$.
Таким образом, множеству значений принадлежит число 5.
Правильный ответ: 1.

A8. Решите неравенство $\dfrac{(x-2)(4x+3)}{x+4} \geq 0$.

1. $\left[-4; -\dfrac{3}{4}\right] \cup (2; +\infty)$ **2.** $(-\infty; -4) \cup \left[-\dfrac{3}{2}; 2\right]$

3. $\left(-4; -\dfrac{3}{4}\right] \cup [2; +\infty)$ **4.** $\left(-\infty; -\dfrac{3}{4}\right] \cup (2; +\infty)$

$$\frac{(x-2)(4x+3)}{x+4} \geq 0$$



Правильный ответ: 3.

A9. Решите уравнение $\sin x - \dfrac{\sqrt{2}}{2} = 0$.

1. $\dfrac{\pi}{4} + 2\pi k,\ k \in \mathbb{Z}$ **2.** $(-1)^k \dfrac{\pi}{4} + \pi k,\ k \in \mathbb{Z}$

3. $\dfrac{\pi}{4} + \pi k,\ k \in \mathbb{Z}$ **4.** $\pm\dfrac{\pi}{4} + 2\pi k,\ k \in \mathbb{Z}$

$$\sin x - \frac{\sqrt{2}}{2} = 0 \Leftrightarrow \sin x = \frac{\sqrt{2}}{2} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \dfrac{\pi}{4} + 2\pi k, \\ x = \dfrac{3\pi}{4} + 2\pi k,\ k \in \mathbb{Z}. \end{array}\right.$$

Правильный ответ: 4.

A10. Укажите область определения функции $y = \sqrt{3 - \lg x}$.

1. $(0; 3]$ **2.** $(0; 1000]$ **3.** $(3; 1000]$ **4.** $[1000; +\infty)$

Область определения функции задается неравенством:

$$3 - \lg x \geq 0 \Leftrightarrow \lg x \leq 3 \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq 10^3, \\ x > 0 \end{cases} \Leftrightarrow 0 < x \leq 1000.$$

Правильный ответ: 2.

Часть B

B1. Решите уравнение $3^{4x+5} = 81$.

$$3^{4x+5} = 81 \Leftrightarrow 3^{4x+5} = 3^4 \Leftrightarrow 4x + 5 = 4 \Leftrightarrow 4x = -1 \Leftrightarrow x = -\frac{1}{4}.$$

Ответ: $\left\{-\dfrac{1}{4}\right\}$.

B2. Решите уравнение $x-\sqrt{2x^2-9x+5}=3$.

$$x-\sqrt{2x^2-9x+5}=3 \Leftrightarrow \sqrt{2x^2-9x+5}=x-3 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x-3\ge 0 \\ 2x^2-9x+5=(x-3)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\ge 3 \\ x^2-3x-4=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\ge 3 \\ \left[\begin{array}{l} x=-1 \\ x=4 \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow x=4.$$

Ответ: $\{4\}$.

B3. Тело движется по прямой так, что расстояние S (в метрах) от него до точки M этой прямой изменяется по закону $S(t)=t^2+t+2$ (t – время движения в секундах). Через сколько секунд после начала движения мгновенная скорость тела будет равна 5 м/с?

Найдем закон изменения скорости:

$$v(t)=S'(t)=2t+1 \text{ м/с}.$$

Решим уравнение

$$5=2t+1 \Leftrightarrow 2t=4 \Leftrightarrow t=2 \text{ с}.$$

Ответ: через 2 секунды.

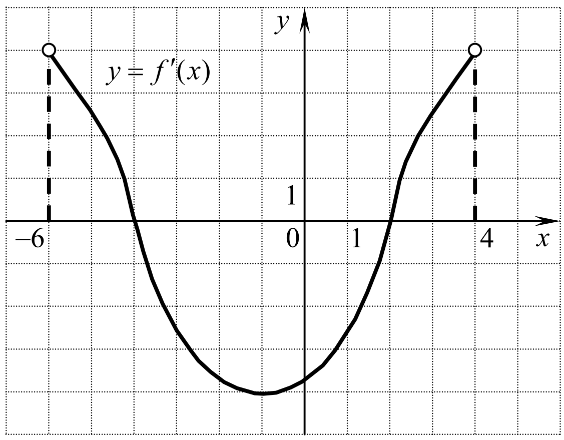
B4. Вычислите $6\log_2 125\cdot\log_5 2+2^{\lg 7}\cdot 5^{\lg 7}$.

$$6\log_2 125\cdot\log_5 2+2^{\lg 7}\cdot 5^{\lg 7}=6\log_2 5^3\cdot\frac{1}{\log_2 5}+(2\cdot 5)^{\lg 7}=$$

$$=18\frac{\log_2 5}{\log_2 5}+7=18+7=25.$$

Ответ: 25.

B5. Функция $y=f(x)$ определена на промежутке $(-6;\,4)$. График ее производной изображен на рисунке. Укажите точку минимума функции $y=f(x)$ на этом промежутке.



Точке минимума соответствует изменение знака производной с минуса на плюс. На приведенном графике производной такая точка единственна и имеет абсциссу 2.

Ответ: 2.

B6. Вычислите площадь фигуры, ограниченной линиями $y = x^2 + 1$, $x = 1$, $x = 4$ и $y = 0$.

Поскольку график функции $y = x^2 + 1$ не пересекает прямую $y = 0$, площадь вычисляется следующим образом:

$$S = \int_1^4 (x^2+1)dx = \left(\frac{1}{3}x^3 + x\right)\Bigg|_1^4 =$$

$$= \left(\frac{1}{3}\cdot 4^3 + 4\right) - \left(\frac{1}{3} + 1\right) = \frac{63}{3} + 3 = 21 + 3 = 24.$$

Ответ: 24.

B7. Найдите значение выражения $\sqrt[4]{(x-3)^4} + \sqrt[4]{\left(x - \frac{15}{2}\right)^4}$, если $\frac{31}{10} \le x \le \frac{36}{5}$.

Упростим выражение, используя свойства корней четной степени и свойства модуля:

$$\sqrt[4]{(x-3)^4} + \sqrt[4]{\left(x - \frac{15}{2}\right)^4} = |x-3| + \left|x - \frac{15}{2}\right| =$$

$$= \begin{cases} (x-3) + \left(x - \frac{15}{2}\right), \ x \ge \frac{15}{2}, \\ (x-3) - \left(x - \frac{15}{2}\right), \ 3 \le x \le \frac{15}{2}, \\ -(x-3) - \left(x - \frac{15}{2}\right), \ x \le 3 \end{cases} = \begin{cases} 2x - 10{,}5, \ x \ge \frac{15}{2}, \\ 4{,}5, \ 3 \le x \le \frac{15}{2}, \\ -2x + 4{,}5, \ x \le 3. \end{cases}$$

Поскольку по условию задан промежуток целиком лежащий в отрезке $\left[3; \frac{15}{2}\right]$, заданное выражение на этом промежутке равно 4,5.

Ответ: 4,5.

B8. Найдите наибольшее целое значение функции $y = 25 \cdot 3^{\cos 4x \cos 3x + \sin 4x \sin 3x - 2}$.

Упростим выражение, задающее функцию:

$$y = 25 \cdot 3^{\cos 4x \cos 3x + \sin 4x \sin 3x - 2} = 25 \cdot 3^{\cos(4x - 3x) - 2} = 25 \cdot 3^{\cos x - 2}.$$

В силу монотонного возрастания показательной функции с основанием большим единицы, промежутки ее монотонности совпадают с промежутками монотонности показателя ее степени. Поскольку множество значений функции $\cos x - 2$ есть отрезок $[-3; -1]$, множество значений функции $3^{\cos x - 2}$ есть отрезок $[3^{-3}; 3^{-1}]$. Тогда множество значений исходной функции есть отрезок $\left[\frac{25}{27}; \frac{25}{3}\right]$, а ее наибольшее целое значение есть 8.

Ответ: 8.

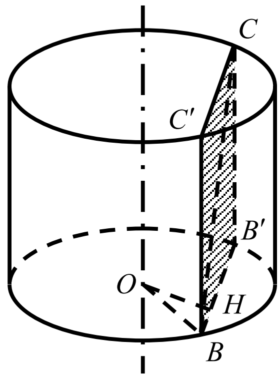
B9. Торговая база закупила партию альбомов и поставила ее магазину по оптовой цене, которая на 30% больше закупочной. Магазин установил розничную цену на альбом на 20% выше оптовой. При распродаже в конце сезона магазин снизил розничную цену на альбом на 10%. На сколько рублей больше заплатил покупатель по сравнению с закупочной ценой, если на распродаже он приобрел альбом за 70,2 рубля?

Пусть закупочная цена есть x рублей, тогда оптовая цена — $1{,}3x$, розничная цена составляет $1{,}2\cdot 1{,}3x = 1{,}56x$. После снижения розничной цены на 10%, она стала $0{,}9\cdot 1{,}56x = 1{,}404x$. Тем самым, после снижения цен розничная цена на 41,3% выше закупочной.
Решим уравнение

$$1{,}404x = 70{,}2 \Leftrightarrow x = 70{,}2 : 1{,}404 \Leftrightarrow x = 50.$$

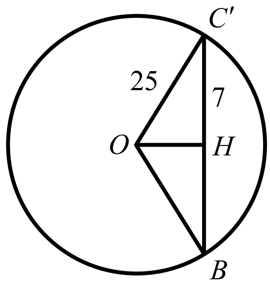
Таким образом, закупочная цена составляла 50 рублей, а покупатель заплатил на 20,2 рубля больше.
Ответ: на 20,2 рубля.

B10. Концы отрезка BC лежат на окружностях двух оснований цилиндра. Радиус основания цилиндра равен 25, длина отрезка BC равна $14\sqrt{2}$, а угол между прямой BC и плоскостью основания цилиндра равен $45°$. Найдите расстояние между осью цилиндра и параллельной ей плоскостью, проходящей через точки B и C.



Проведем прямые, параллельные оси цилиндра из точек B и C до их пересечения с противоположным основанием цилиндра, получим, соответственно, точки B' и C'. Расстояние от оси цилиндра до плоскости $BCC'B'$ есть длина перпендикуляра OH, опущенного из точки O — центра нижнего основания цилиндра до прямой BC'. Треугольник $OC'B$ равнобедренный, так как две его стороны — радиусы окружности, тогда:

$$C'H = \frac{1}{2}\cdot CB = 7.$$

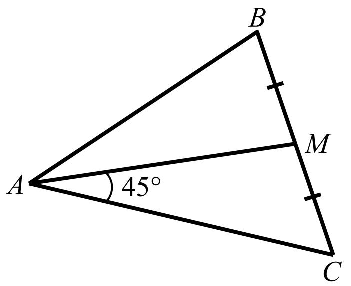


По теореме Пифагора для треугольника OHC':

$$OH = \sqrt{OC'^2 - C'H^2} = \sqrt{25^2 - 7^2} = \sqrt{576} = 24.$$

Ответ: 24.

B11. В треугольнике ABC проведена медиана AM. Найдите площадь треугольника ABC, если $AC = 3\sqrt{2}$, $BC = 10$, $\angle MAC = 45°$.



1. По теореме косинусов:

$$MC^2 = AM^2 + AC^2 - 2AM\cdot AC\cdot\cos(\widehat{MAC}) \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow 25 = AM^2 + 18 - 2AM\cdot 3\sqrt{2}\cdot 0{,}5\sqrt{2} \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow AM^2 - 6AM - 7 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} AM = -1 - \text{решений нет,} \\ AM = 7 \end{array}\right. \Leftrightarrow AM = 7.$$

2. Найдем площадь треугольника AMC:

$$S_{\vartriangle AMC} = 0{,}5\cdot AM\cdot MC\cdot\sin(\widehat{MAC}) = 0{,}5\cdot 7\cdot 3\sqrt{2}\cdot 0{,}5\sqrt{2} = 10{,}5.$$

3. По свойству медианы

$$S_{\vartriangle ABC} = 2S_{\vartriangle AMC} = 2\cdot 10{,}5 = 21.$$

Ответ: 21.

Часть C

C1. Решите уравнение $|\sin x| = \sin x\cdot\cos x$.

$$|\sin x| = \sin x\cdot\cos x \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\sin x = \sin x\cdot\cos x,\ \sin x>0,\\ 0=0,\ \sin x = 0,\\ -\sin x = \sin x\cdot\cos x,\ \sin x<0\end{array}\right. \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\cos x = 1,\ \sin x>0 - \text{решений нет},\\ 0=0,\ \sin x=0,\\ \cos x=-1,\ \sin x<0 - \text{решений нет}\end{array}\right. \Leftrightarrow x=\pi k,\ k\in\mathbb{Z}.$$

$\{\pi k : k\in\mathbb{Z}\}$

C2. Найдите нули функции $y=\ln^2(x^2-3x-9)+\sqrt{x^3-8x-8}$.

Сумма двух неотрицательных слагаемых обращается в нуль, только если они одновременно обращаются в нуль. Решим систему:

$$\begin{cases}\ln^2(x^2-3x-9)=0,\\ \sqrt{x^3-8x-8}=0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\ln(x^2-3x-9)=0,\\ x^3-8x-8=0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x^2-3x-9=1,\\ x^3-8x-8=0\end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}x^2-3x-10=0,\\ x^3-8x-8=0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\left[\begin{array}{l}x=-2,\\ x=5,\end{array}\right.\\ x^3-8x-8=0.\end{cases}$$

Очевидно, что число -2 является корнем кубического уравнения, а число 5 — нет. Отсюда -2 есть единственное решение системы уравнений, а вместе с тем, и нуль исходной функции.
Ответ: -2.

C3. Решите систему уравнений $\begin{cases}\dfrac{-y+10x+11}{-2y-5x}=-5y-15x+22,\\ 25^{-2y-5x}+25=26\cdot5^{-2y}\cdot5^{-5x}.\end{cases}$

Рассмотрим второе уравнение системы:

$$25^{-2y-5x}+25=26\cdot5^{-2y}\cdot5^{-5x} \Leftrightarrow 25^{-2y-5x}-26\cdot5^{-2y-5x}+25=0.$$

Пусть $5^{-2y-5x}=t$.
Решим уравнение

$$t^2-26t+25=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}t=1,\\ t=25.\end{array}\right.$$

Таким образом,

$$\left[\begin{array}{l}5^{-2y-5x}=1\\ 5^{-2y-5x}=25\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}-2y-5x=0\\ -2y-5x=2\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}5x=-2y,\\ 5x=-2y-2.\end{array}\right.$$

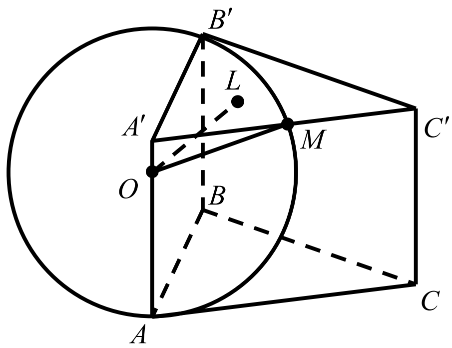
Итак,

$$\left[\begin{array}{l}\begin{cases}\dfrac{-y+10x+11}{-2y-5x}=-5y-15x+22\\ 5x=-2y\end{cases} \text{ – решений нет,}\\ \begin{cases}\dfrac{-y+10x+11}{-2y-5x}=-5y-15x+22,\\ 5x=-2y-2\end{cases}\end{array}\right. \Leftrightarrow \begin{cases}\dfrac{-y+10x+11}{-2y-5x}=-5y-15x+22,\\ 5x=-2y-2\end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}\dfrac{-y+2(-2y-2)+11}{-2y-(-2y-2)}=-5y-3(-2y-2)+22,\\ 5x=-2y-2\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}-7y=49,\\ 5x=-2y-2\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x=\dfrac{12}{5},\\ y=-7.\end{cases}$$

Ответ: $\left\{\left(\dfrac{12}{5};-7\right)\right\}$.

С4. Дана правильная призма $ABCA_1B_1C_1$, где AA_1, BB_1 и CC_1 — боковые ребра. Сфера, центр которой лежит на ребре AA_1, пересекает ребро A_1C_1 в точке M и касается плоскости основания ABC и боковой грани BB_1C_1C. Известно, что $AB=12$, $\dfrac{A_1M}{MC_1}=\dfrac{3}{1}$. Найдите площадь боковой поверхности призмы.



Площадь боковой поверхности правильной призмы равна произведению периметра основания 36 на длину высоты призмы *H*, которую и осталось найти. Пусть точка *O* — центр заданной сферы, тогда *OA* и *OM* и *OL* — ее радиусы. (Отрезок *OA* перпендикулярен основанию, радиус, проведенный из центра сферы в точку касания сферы и плоскости, перпендикулярен этой плоскости, из точки можно провести единственный перпендикуляр к плоскости, поэтому *OA* — действительно радиус).

Поскольку длина *OL* совпадает с длиной высоты основания (как расстояния между параллельными прямой и плоскостью), имеем:

$$OA=OM=OL=\frac{12\sqrt{3}}{2}=6\sqrt{3}.$$

Рассмотрим треугольник $OA'M$. Он прямоугольный, и длины его сторон суть

$$A_1M=\frac{3}{4}A_1C_1=9,\ OM=6\sqrt{3},\ OA_1=H-R=H-6\sqrt{3}.$$

Заметим, что $H>6\sqrt{3}$ и применим теорему Пифагора:

$$A_1O^2+A_1M^2=OM^2 \Leftrightarrow (H-6\sqrt{3})^2+9^2=(6\sqrt{3})^2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow H^2-12\sqrt{3}H+81=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}H=9\sqrt{3},\\ H=3\sqrt{3}.\end{array}\right.$$

Второй корень квадратного уравнения не подходит по смыслу задачи, а первый приводит к ответу. Искомая площадь равна $36\cdot 9\sqrt{3}=324\sqrt{3}$.

Ответ: $324\sqrt{3}$.

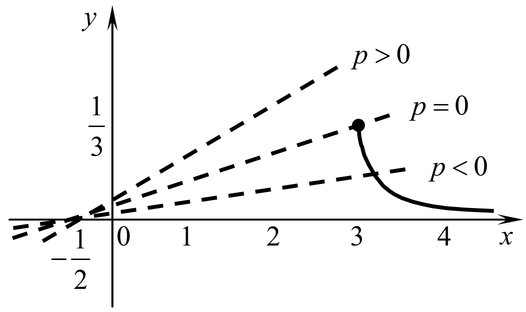
С5. Найдите все значения параметра *p*, при которых уравнение $(2p+3)x^2+(p+3)x+1=0$ имеет хотя бы один корень, и число различных корней этого уравнения равно числу различных корней уравнения $\dfrac{2x+1}{21-p}=\dfrac{1}{\sqrt{x-3}+3}$.

Рассмотрим уравнение

$$\frac{2x+1}{21-p}=\frac{1}{\sqrt{x-3}+3}\Leftrightarrow\frac{1}{21-p}(2x+1)=\frac{1}{\sqrt{x-3}+3}.$$

Оно определено при $x\geq 3$, и при всех допустимых значениях переменной его правая часть положительна. Тогда для существования решений требуется положительность левой части уравнения. Заметим, что при $x\geq 3$ выражение $2x+1$ положительно, а тогда и выражение $21-p$ должно быть положительно. Но в этом случае левая часть уравнения представляет собой возрастающую функцию, в то время, как правая часть — убывающая функция. Поэтому уравнение не может иметь более одного корня.

Изобразим графики левой и правой частей уравнения на рисунке. Наклон прямой $\dfrac{1}{21-p}(2x+1)$ должен быть таким, чтобы она в точке $x=3$ принимала значение не превышающее $\dfrac{1}{3}$. Отсюда



$$\frac{1}{21-p}(2\cdot 3+1)\leq\frac{1}{3}\Leftrightarrow p\leq 0.$$

Итак, при положительных значениях параметра уравнение не имеет решений, а при неотрицательных — имеет единственное решение. Осталось выяснить, при каких значениях параметра уравнение $(2p+3)x^2+(p+3)x+1=0$ имеет единственное решение.

Это возможно в двух а) случаях: данное уравнение линейное, и имеет 1 корень; б) данное уравнение квадратное, имеющее 1 корень.

В случае а) имеем:

$$2p+3=0\Leftrightarrow p=-1{,}5.$$

При этом уравнение принимает вид $\dfrac{3}{2}x+1=0$ и действительно имеет единственное решение.

В случае б) воспользуемся условием равенства дискриминанта нулю:

$$(p+3)^2-4(2p+3)=0\Leftrightarrow p^2-2p-3=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}p=-1,\\ p=3.\end{array}\right.$$

Среди найденных значений параметра осталось выбрать отрицательные. Это числа $-1{,}5$ и -1.

Ответ: $-\dfrac{3}{2}$, -1.