

Единый государственный экзамен по математике, 2001 год

Часть А

А1. Найдите значение выражения $81^{\frac{1}{4}} - 3\sqrt{3} \cdot 3^{\frac{1}{2}}$.

1. -6 2. $\sqrt{3}$ 3. 6 4. $11,25$

Решение. Используя свойства степени получаем:

$$81^{\frac{1}{4}} - 3\sqrt{3} \cdot 3^{\frac{1}{2}} = (3^4)^{\frac{1}{4}} - 3 \cdot 3^{\frac{1}{2}} \cdot 3^{\frac{1}{2}} = 3 - 3 \cdot 3 = 3 - 9 = -6.$$

Правильный ответ: 1.

А2. Упростите выражение $\frac{\sqrt[3]{a^2} - 16}{\sqrt[3]{a} - 4} - \sqrt[3]{a}$.

1. -4 2. 4 3. $-2\sqrt[3]{a}$ 4. 0

Решение. Используя свойства арифметического корня последовательно получаем:

$$\frac{\sqrt[3]{a^2} - 16}{\sqrt[3]{a} - 4} - \sqrt[3]{a} = \frac{(\sqrt[3]{a})^2 - 4^2}{\sqrt[3]{a} - 4} - \sqrt[3]{a} = \frac{(\sqrt[3]{a} - 4)(\sqrt[3]{a} + 4)}{\sqrt[3]{a} - 4} - \sqrt[3]{a} = \sqrt[3]{a} + 4 - \sqrt[3]{a} = 4.$$

Правильный ответ: 2.

А3. Упростите выражение $2^{\log_2 7} + \log_5 75 - \log_5 3$.

1. 9 2. 32 3. 51 4. 4

Решение. Используя основное логарифмическое тождество и формулу преобразования разности логарифмов в логарифм частного, получаем:

$$2^{\log_2 7} + \log_5 75 - \log_5 3 = 7 + \log_5 \left(\frac{75}{3} \right) = 7 + \log_5 25 = 7 + 2 = 9.$$

Правильный ответ: 1.

А4. Решите неравенство $\left(\frac{1}{4} \right)^{x-3} < \frac{1}{16}$.

1. $(-\infty; 5)$ 2. $(-\infty; 7)$ 3. $(5; +\infty)$ 4. $(7; +\infty)$

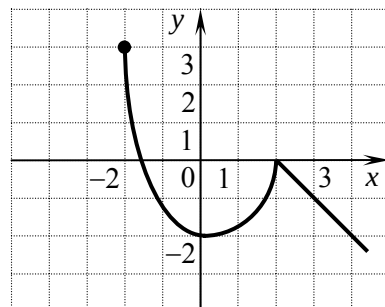
Решение. Перейдем к одному основанию и воспользуемся убыванием показательной функции с основанием меньшим единицы:

$$\left(\frac{1}{4}\right)^{x-3} < \frac{1}{16} \Leftrightarrow \left(\frac{1}{4}\right)^{x-3} < \left(\frac{1}{4}\right)^2 \xLeftrightarrow[\frac{1}{4} < 1] x-3 > 2 \Leftrightarrow x > 5$$

Правильный ответ: 3.

A5. Укажите промежуток возрастания функции $y = f(x)$, заданной графиком.

1. $(-2; 0)$
2. $[-2; 2]$
3. $(-2; -1)$
4. $[0; 2]$



Решение. Функция убывает на промежутках $[-2; 0]$ и $[2; +\infty)$.
Функция возрастает на промежутке $[0; 2]$.

Правильный ответ: 4.

A6. Упростите выражение $\frac{\sin 2\alpha}{\sin \alpha} - \sin\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right)$.

1. $3 \cos \alpha$
2. $\cos \alpha$
3. 0
4. $2 \cos \alpha - \sin \alpha$

Решение. Используя формулу синуса двойного аргумента и формулу приведения, получим:

$$\frac{\sin 2\alpha}{\sin \alpha} - \sin\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) = \frac{2 \sin \alpha \cdot \cos \alpha}{\sin \alpha} - \cos \alpha = 2 \cos \alpha - \cos \alpha = \cos \alpha.$$

Правильный ответ: 2.

A7. Найдите производную функции $g(x) = 3x^4 - \sin x + 5$.

1. $g'(x) = 12x^3 - \cos x$
2. $g'(x) = 4x^3 + \cos x$
3. $g'(x) = 12x^3 + \cos x + 5$
4. $g'(x) = 12x^3 - \cos x + 5$

Решение. Используя формулы $(x^n)' = nx^{n-1}$, $(\sin x)' = \cos x$ и $(\text{const})' = 0$, получим:

$$g'(x) = 4 \cdot 3x^3 - \cos x = 12x^3 - \cos x.$$

Правильный ответ: 1.

A8. Укажите промежуток, которому принадлежит корень уравнения $\log_2(x+1) = 4$.

1. $(8; 10)$
2. $(14; 16)$
3. $(6; 8)$
4. $(4; 6)$

Решение. Решим уравнение:

$$\log_2(x+1) = 4 \Leftrightarrow x+1 = 2^4 \Leftrightarrow x+1 = 16 \Leftrightarrow x = 15.$$

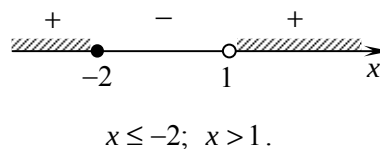
Корень уравнения принадлежит промежутку $(14; 16)$.

Правильный ответ: 2.

A9. Найдите область определения функции $f(x) = \sqrt{\frac{x+2}{x-1}}$.

1. $(-\infty; -2] \cup [1; +\infty)$ 2. $[-2; 1)$ 3. $(-\infty; -2] \cup (1; +\infty)$ 4. $(-2; 1)$

Решение. Область определения функции задается неравенством $\frac{x+2}{x-1} \geq 0$. Решим его методом интервалов.



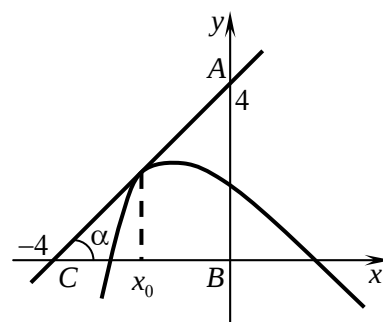
Правильный ответ: 3.

A10. Найдите значение производной функции $y = f(x)$ в точке x_0 .

1. -2
2. 2
3. -1
4. 1

Решение. Значение производной в точке касания равно тангенсу угла наклона касательной, проведенной в этой точке. Найдем $\operatorname{tg} \alpha$

из треугольника ABC (см. рис.): $\operatorname{tg} \alpha = \frac{AB}{BC} = \frac{4}{4} = 1$.



Правильный ответ: 4.

A11. Найдите наименьшее значение функции $f(x) = x^3 - 3x$ на отрезке $[0; 3]$.

1. 0 2. -4 3. -2 4. 2

Решение. Найдем критические точки данной функции на отрезке $[0; 3]$. Производная заданной функции есть $f'(x) = 3x^2 - 3$, решениями уравнения $f'(x) = 0$ являются числа -1 и 1 , из них отрезку $[0; 3]$ принадлежит только число 1 .

Вычислим значения функции в точке $x = 1$ и на концах отрезка $[0; 3]$ и выберем из них наименьшее: $f(1) = -2$, $f(0) = 0$, $f(3) = 18$. Тогда искомое наименьшее значение есть -2 .

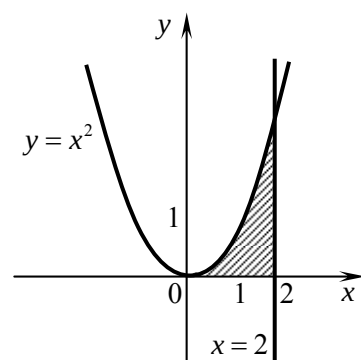
Правильный ответ: 3.

A12. Найдите площадь фигуры, ограниченной линиями: $y = x^2$, $y = 0$, $x = 2$.

1. 8 2. $\frac{8}{3}$ 3. 4 4. $\frac{7}{3}$

Решение. Нарисуем эскизы графиков функций $y = x^2$, $y = 0$, $x = 2$. Фигура, площадь которой требуется найти, на рисунке заштрихована.

Площадь этой фигуры S находим по формуле $S = \int_a^b f(x) dx$:



$$S = \int_0^2 x^2 dx = \frac{1}{3} x^3 \Big|_0^2 = \frac{1}{3} (8 - 0) = \frac{8}{3}.$$

Правильный ответ: 2.

A13. Решите уравнение $2 \cos^2 x - 3 \sin x = 0$.

1. $\pm \frac{\pi}{3} + 2\pi k; k \in \mathbb{Z}$

2. $(-1)^k \frac{\pi}{6} + \pi k; k \in \mathbb{Z}$

3. $\pm \frac{\pi}{6} + 2\pi k; k \in \mathbb{Z}$

4. $(-1)^k \frac{\pi}{3} + \pi k; k \in \mathbb{Z}$

Решение. Используя основное тригонометрическое тождество, приведем уравнение к квадратному относительно $\sin x$ и решим его:

$$\begin{aligned} 2 \cos^2 x - 3 \sin x = 0 &\Leftrightarrow 2(1 - \sin^2 x) - 3 \sin x = 0 \Leftrightarrow 2 \sin^2 x + 3 \sin x - 2 = 0 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} \sin x = -2 - \text{решений нет,} \\ \sin x = \frac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \sin x = \frac{1}{2} \Leftrightarrow x = (-1)^k \frac{\pi}{6} + \pi k; k \in \mathbb{Z}. \end{aligned}$$

Правильный ответ: 2.

Часть В

B1. Решите уравнение $\sqrt{2x+7} - 2 = x$.

Решение. Используя теорему $\sqrt{f(x)} = g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) = g^2(x), \\ g(x) \geq 0 \end{cases}$, получим:

$$\begin{aligned} \sqrt{2x+7} - 2 = x &\Leftrightarrow \sqrt{2x+7} = x+2 \Leftrightarrow \begin{cases} x+2 \geq 0, \\ 2x+7 = (x+2)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -2, \\ x^2 + 2x - 3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -2, \\ \begin{cases} x = -3, \\ x = 1 \end{cases} \end{cases} \Leftrightarrow x = 1. \end{aligned}$$

Ответ: $\{1\}$.

B2. Найдите значение выражения $\frac{\sin^2 27^\circ - \sin^2 63^\circ}{\sin 18^\circ \cdot \cos 18^\circ}$.

Решение. (I способ). Воспользуемся формулами приведения и формулами косинуса и синуса двойного аргумента: $\cos 2\alpha = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha$ и $\sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cos \alpha$. Имеем

$$\begin{aligned} \frac{\sin^2 27^\circ - \sin^2 63^\circ}{\sin 18^\circ \cdot \cos 18^\circ} &= \frac{\sin^2 (90^\circ - 63^\circ) - \sin^2 63^\circ}{\sin 18^\circ \cdot \cos 18^\circ} = \frac{2(\cos^2 63^\circ - \sin^2 63^\circ)}{2 \sin 18^\circ \cdot \cos 18^\circ} = \\ &= \frac{2 \cos(2 \cdot 63^\circ)}{\sin 36^\circ} = \frac{2 \cos 126^\circ}{\sin 36^\circ} = \frac{2 \cos(90^\circ + 36^\circ)}{\sin 36^\circ} = \frac{-2 \sin 36^\circ}{\sin 36^\circ} = -2. \end{aligned}$$

Решение. (II способ). Используем формулу понижения степени $\sin^2 \alpha = \frac{1 - \cos 2\alpha}{2}$. Имеем

$$\frac{\sin^2 27^\circ - \sin^2 63^\circ}{\sin 18^\circ \cdot \cos 18^\circ} = \frac{\frac{1 - \cos 54^\circ}{2} - \frac{1 - \cos 126^\circ}{2}}{\sin 18^\circ \cdot \cos 18^\circ} = \frac{-\cos 54^\circ + \cos 126^\circ}{2 \sin 18^\circ \cdot \cos 18^\circ} =$$

$$= \frac{-\cos(90^\circ - 36^\circ) + \cos(90^\circ + 36^\circ)}{\sin 36^\circ} = \frac{-\sin 36^\circ - \sin 36^\circ}{\sin 36^\circ} = -2.$$

Ответ: -2 .

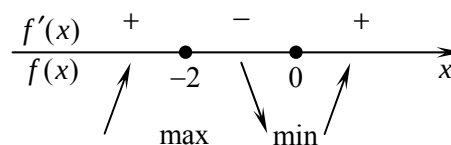
В3. Найдите точку максимума функции $f(x) = x^2 \cdot e^x$.

Решение. Найдем производную данной функции:

$$\begin{aligned} f'(x) &= (x^2)' \cdot e^x + (e^x)' \cdot x^2 = 2x \cdot e^x + e^x \cdot x^2 = \\ &= e^x(2x + x^2); \end{aligned}$$

Найдем нули производной:

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow e^x(2x + x^2) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -2, \\ x = 0. \end{cases}$$



Поведение функции изображено на рисунке. Максимум функции достигается в точке $x = -2$.

Ответ: точка максимума: -2 .

В4. Найдите меньший корень уравнения $3 \cdot 9^x - 5 \cdot 6^x + 2 \cdot 4^x = 0$.

Решение. Данное уравнение является однородным относительно выражений 3^x и 2^x . Так как 4^x не равно нулю ни при каких значениях x , разделив левую и правую часть уравнения на 4^x , получаем:

$$\begin{aligned} 3 \cdot 9^x - 5 \cdot 6^x + 2 \cdot 4^x = 0 &\Leftrightarrow 3 \cdot \left(\frac{9}{4}\right)^x - 5 \cdot \left(\frac{6}{4}\right)^x + 2 = 0 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow 3 \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^{2x} - 5 \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^x + 2 = 0. \quad (*) \end{aligned}$$

Пусть $\left(\frac{3}{2}\right)^x = t$. Тогда уравнение $(*)$ принимает вид $3t^2 - 5t + 2 = 0$. Далее имеем

$$3t^2 - 5t + 2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = \frac{2}{3}, \\ t = 1. \end{cases}$$

Таким образом,

$$\begin{aligned} \begin{cases} \left(\frac{3}{2}\right)^x = \frac{2}{3} \\ \left(\frac{3}{2}\right)^x = 1 \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} \left(\frac{3}{2}\right)^x = \left(\frac{3}{2}\right)^{-1} \\ \left(\frac{3}{2}\right)^x = \left(\frac{3}{2}\right)^0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1, \\ x = 0. \end{cases} \end{aligned}$$

Итак, меньший корень уравнения равен -1 .

Ответ: -1 .

В5. Катер прошел по течению реки расстояние от пункта A до пункта B за 3 ч, а от B до A — за 5 ч. За сколько часов проплывет от A до B плот?

Решение. Пусть S — расстояние между A и B , v — скорость катера, u — скорость течения реки ($S, v, u > 0$, $v > u$). При движении из A в B скорость катера была $v + u = \frac{S}{3}$ км/ч, при движении из B в A скорость была $v - u = \frac{S}{5}$ км/ч. Решим систему:

$$\begin{cases} v + u = \frac{S}{3}, \\ v - u = \frac{S}{5} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2u = \frac{S}{3} - \frac{S}{5}, \\ v = \frac{S}{5} + u \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u = \frac{S}{15}, \\ v = \frac{4S}{15}. \end{cases}$$

Таким образом, скорость течения реки равна $\frac{S}{15}$ км/ч, и плот, движущийся со скоростью реки, пройдет пусть от A до B за 15 часов.

Ответ: 15 часов.

В6. Найдите число целых решений неравенства $(|x + 2| - 3)(\sin x - \pi) \geq 0$.

Решение. Поскольку второй множитель, в силу ограничения $-1 \leq \sin x \leq 1$, отрицателен при всех значениях x , имеем неравенство:

$$|x + 2| - 3 \leq 0 \Leftrightarrow |x + 2| \leq 3 \Leftrightarrow \begin{cases} x + 2 \geq -3 \\ x + 2 \leq 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -5 \\ x \leq 1 \end{cases} \Leftrightarrow -5 \leq x \leq 1.$$

Таким образом, неравенство имеет 5 отрицательных целых решений, одно положительное и решение 0. Всего их 7.

Ответ: 7 штук.

В7. Найдите наибольшее целое значение параметра c , при котором решение системы уравнений $\begin{cases} x + 7y = c, \\ 2x - y = 5 \end{cases}$ удовлетворяет неравенству $x > y - 2$.

Решение. Решим систему

$$\begin{aligned} \begin{cases} x + 7y = c, \\ 2x - y = 5 \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} x = c - 7y, \\ 2(c - 7y) - y = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = c - 7y, \\ 15y = 2c - 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = c - 7y, \\ y = \frac{2}{15}c - \frac{1}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x = c - 7\left(\frac{2}{15}c - \frac{1}{3}\right), \\ y = \frac{2}{15}c - \frac{1}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{1}{15}c + \frac{7}{3}, \\ y = \frac{2}{15}c - \frac{1}{3}. \end{cases} \end{aligned}$$

Решим неравенство $x > y - 2$:

$$\frac{1}{15}c + \frac{7}{3} > \frac{2}{15}c - \frac{1}{3} - 2 \Leftrightarrow \frac{1}{15}c - \frac{2}{15}c > -\frac{1}{3} - \frac{7}{3} - 2 \Leftrightarrow -\frac{1}{15}c > -\frac{14}{3} \Leftrightarrow c < 70.$$

Наибольшим целым значением c , удовлетворяющим неравенству $c < 70$, является число 69.

Ответ: 69.

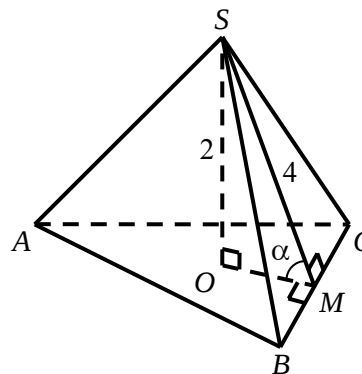
В8. Высота правильной треугольной пирамиды равна 2, двугранные углы при основании равны 30° . Найдите площадь боковой поверхности пирамиды.

Решение. Пусть $SABC$ — заданная пирамида (см. рисунок), SO — ее высота, $\angle SMO$ — линейный угол двугранного угла при основании. Поскольку $SABC$ — правильная пирамида, основание O ее высоты есть центр окружности, вписанной в треугольник ABC , следовательно, OM — радиус этой окружности, откуда $BC = 2\sqrt{3}OM$. Из прямоугольного треугольника SOM находим $OM = SO \operatorname{ctg} 30^\circ = 2\sqrt{3}$, $SM = 4$. Тогда $BC = 12$.

Окончательно получаем

$$S_{\text{б. п.}} = 0,5P_{ABC} \cdot SM = 0,5 \cdot 3 \cdot 12 \cdot 4 = 72.$$

Ответ: 72.



В9. В конус с радиусом основания 4 и высотой $4\sqrt{3}$ вписана треугольная призма, у которой все ребра равны. Найдите объем призмы.

Решение. Пусть ребро призмы равно a , пусть окружность, описанная около верхнего основания — правильного треугольника — имеет радиус r . Тогда ребро призмы есть $a = \sqrt{3}r$.

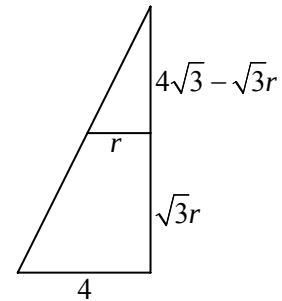
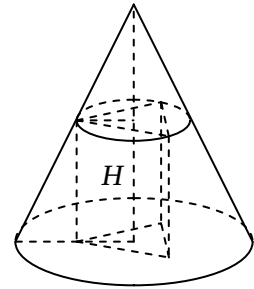
Отношение площади сечения, параллельного основанию конуса, к площади основания равно отношению квадратов их расстояний до вершины конуса, откуда последовательно получаем

$$\frac{\pi r^2}{16\pi} = \frac{(4\sqrt{3} - r\sqrt{3})^2}{(4\sqrt{3})^2}, \quad \frac{r}{4} = \frac{4\sqrt{3} - r\sqrt{3}}{4\sqrt{3}}, \quad \frac{r}{4} = \frac{4-r}{4}, \quad r = 4 - r, \quad r = 2.$$

Тогда $a = 2\sqrt{3}$, откуда объем призмы равен:

$$V = S \cdot H = \frac{a^2 \sqrt{3}}{4} \cdot a = \frac{a^3 \sqrt{3}}{4} = \frac{(2\sqrt{3})^3 \sqrt{3}}{4} = 18.$$

Ответ: 18.



Часть С

С1. Для каждого допустимого значения параметра α решите неравенство $\log_{\text{tg} \alpha} (3x+13) > 2 \log_{\text{tg} \alpha} (x+3)$.

Решение.

1. Если $0 < \text{tg} \alpha < 1$, то $\pi k < \alpha < \frac{\pi}{4} + \pi k$, $k \in \mathbb{Z}$, и мы имеем:

$$\begin{aligned} \log_{\text{tg} \alpha} (3x+13) > 2 \log_{\text{tg} \alpha} (x+3) &\Leftrightarrow \begin{cases} \log_{\text{tg} \alpha} (3x+13) > \log_{\text{tg} \alpha} (x+3)^2, \\ x > -3 \end{cases} \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \begin{cases} 3x+13 < (x+3)^2, \\ x > -3, \\ 3x+13 > 0 \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + 3x - 4 > 0, \\ x > -3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x-1)(x+4) > 0, \\ x > -3 \end{cases} \Leftrightarrow x > 1. \end{aligned}$$

2. Если $\text{tg} \alpha > 1$, то $\frac{\pi}{4} + \pi k < \alpha < \frac{\pi}{2} + \pi k$, $k \in \mathbb{Z}$ и тогда:

$$\begin{aligned} \log_{\text{tg} \alpha} (3x+13) > 2 \log_{\text{tg} \alpha} (x+3) &\Leftrightarrow \begin{cases} \log_{\text{tg} \alpha} (3x+13) > \log_{\text{tg} \alpha} (x+3)^2, \\ x > -3 \end{cases} \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \begin{cases} 3x+13 > (x+3)^2, \\ x > -3, \\ 3x+13 > 0 \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + 3x - 4 < 0, \\ x > -3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x-1)(x+4) < 0, \\ x > -3 \end{cases} \Leftrightarrow -3 < x < 1. \end{aligned}$$

Ответ: $x > 1$ при $\pi k < \alpha < \frac{\pi}{4} + \pi k, k \in \mathbb{Z}$; $-3 < x < 1$ при $\frac{\pi}{4} + \pi k < \alpha < \frac{\pi}{2} + \pi k, k \in \mathbb{Z}$.

С2. Решите уравнение $\cos^2(x \sin x) = 1 + \log_5^2 \sqrt{x^2 + x + 1}$.

Решение. Левая часть уравнения не больше, а правая — не меньше единицы, следовательно, данное уравнение равносильно системам:

$$\begin{aligned} \begin{cases} \cos^2(x \cdot \sin x) = 1, \\ 1 + \log_5^2(x^2 + x + 1) = 1 \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} \cos^2(x \cdot \sin x) = 1, \\ \log_5(x^2 + x + 1) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \cos^2(x \cdot \sin x) = 1, \\ x^2 + x + 1 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} \cos^2(x \cdot \sin x) = 1, \\ \begin{cases} x = -1, \\ x = 0 \end{cases} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \begin{cases} x = -1, \\ \cos^2(-1 \cdot \sin(-1)) = 1 - \text{не верно}, \end{cases} \\ \begin{cases} x = 0, \\ \cos^2 0 = 1 - \text{верно} \end{cases} \end{cases} \Leftrightarrow x = 0. \end{aligned}$$

Ответ: $\{0\}$.

С3. Найдите целые корни уравнения $(6-x)(x-2)(x+3)(x+9) = 24x^2$.

Решение.

$$\begin{aligned} (6-x)(x-2)(x+3)(x+9) = 24x^2 &\Leftrightarrow (x-6)(x-2)(x+3)(x+9) = -24x^2 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow (x^2 - 3x - 18)(x^2 + 7x - 18) = -24x^2 \Leftrightarrow \underset{x=0 - \text{не решение}}{\left(x - \frac{18}{x} - 3\right)\left(x - \frac{18}{x} + 7\right)} = -24. \quad (*) \end{aligned}$$

Пусть $x - \frac{18}{x} = t$. Тогда уравнение (*) принимает вид $(t-3)(t+7) = -24$, откуда получаем

$$(t-3)(t+7) = -24 \Leftrightarrow t^2 + 4t + 3 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = -3, \\ t = -1. \end{cases}$$

Таким образом,

$$\begin{cases} x \in \mathbb{Z} \\ \begin{cases} x - \frac{18}{x} = -3 \\ x - \frac{18}{x} = -1 \end{cases} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \in \mathbb{Z} \\ \begin{cases} x^2 + 3x - 18 = 0 \\ x^2 + x - 18 = 0 \end{cases} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -6 \\ x = 3 \end{cases}$$

Ответ: $-6; 3$.