

Единый государственный экзамен по математике, 2005 год

Часть А

А1. Найдите значение выражения $\frac{n^{\frac{3}{5}}}{n^{\frac{7}{5}}}$ при $n = 8$.

1. $8^{-\frac{3}{7}}$

2. 64

3. 16

4. $8^{\frac{4}{5}}$

Решение. Частное от деления степеней с одинаковыми основаниями есть степень с тем же основанием и показателем, равным разности показателей делимого и делителя:

$$\frac{n^{\frac{3}{5}}}{n^{\frac{7}{5}}} = n^{\frac{3}{5} - \frac{7}{5}} = n^{-2}.$$

При $n = 8$, получим: $n^{-2} = 8^{-2} = \frac{1}{64}$.
Правильный ответ: 2.

А2. Упростите выражение $\sqrt[3]{2^{14} q^{14}}$.

1. $2^{21} q^{21}$

2. $2^7 q^7$

3. $2^{98} q^{98}$

4. $2^2 q^2$

Решение. Поскольку $\sqrt[3]{ab} = \sqrt[3]{a} \sqrt[3]{b}$, получаем:

$$\sqrt[3]{2^{14} q^{14}} = \sqrt[3]{2^{14}} \sqrt[3]{q^{14}} = 2^4 q^4.$$

Правильный ответ: 4.

А3. Вычислите значение выражения $\log_5(5ab)$, если $\log_5(ab) = 0,7$.

1. 1,7

2. 3,5

3. 5,7

4. 4

Решение. Используя формулу преобразования логарифма произведения в сумму логарифмов, имеем

$$\log_5(5ab) = \log_5 5 + \log_5(ab) = 1 + 0,7 = 1,7.$$

Правильный ответ: 1.

А4. Упростите выражение $\sin \frac{7\alpha}{2} \sin \frac{5\alpha}{2} + \cos \alpha - \cos \frac{7\alpha}{2} \cos \frac{5\alpha}{2}$.

1. $\cos \alpha + \cos 6\alpha$

2. 0

3. $2 \cos \alpha$

4. $\cos \alpha - \cos 6\alpha$

Решение. Используя формулу $\cos(x + y) = \cos x \cos y - \sin x \sin y$, получим:

$$\sin \frac{7\alpha}{2} \sin \frac{5\alpha}{2} + \cos \alpha - \cos \frac{7\alpha}{2} \cos \frac{5\alpha}{2} = \cos \alpha - \cos \left(\frac{7\alpha}{2} + \frac{5\alpha}{2} \right) = \cos \alpha - \cos 6\alpha.$$

Правильный ответ: 4.

А5. Найдите производную функции $y = -\frac{7}{6}x^6 + 5x^4 - 14$.

1. $y' = -7x^7 + x^5 - 14x$ 2. $y' = -\frac{1}{6}x^7 + x^5 - 14x$ 3. $y' = -7x^5 + 20x^3$ 4. $y' = -7x^5 + 9x^3$

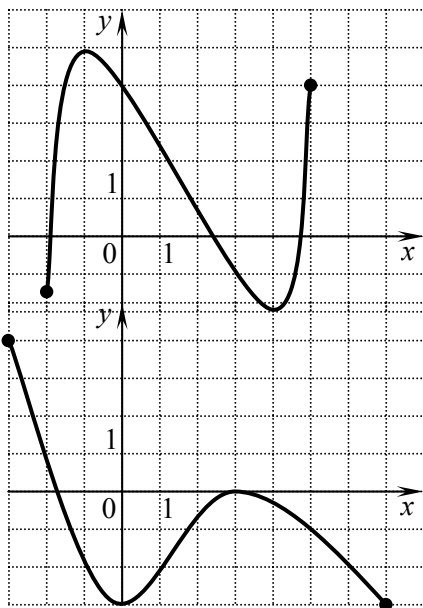
Решение. Используя формулу $(x^n)' = nx^{n-1}$ и правила дифференцирования, получим:

$$y' = -7x^5 + 20x^3.$$

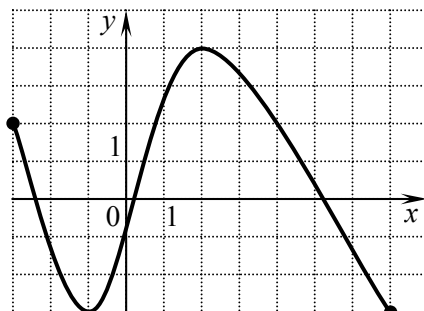
Правильный ответ: 3.

А6. На каком из следующих рисунков функция, заданная графиком, убывает на промежутке $[0; 3]$?

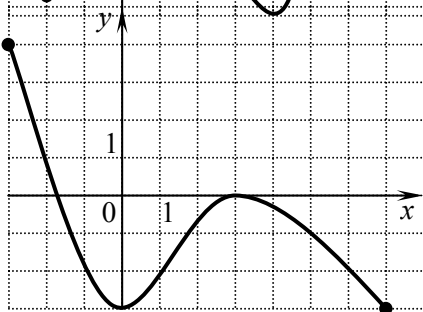
1.



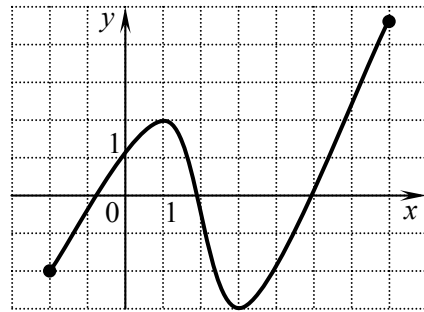
2.



3.



4.



Решение. Функция, график которой изображен на рисунке 1, убывает на отрезке $[0; 3]$; функция, график которой изображен на рисунке 2, не является монотонной на отрезке $[0; 3]$; функция, график которой изображен на рисунке 3, возрастает на отрезке $[0; 3]$; функция, график которой изображен на рисунке 4, не является монотонной на отрезке $[0; 3]$.

Правильный ответ: 1.

А7. Найдите множество значений функции $y = 7 + \cos x$.

1. $[6; 8]$ 2. $[7; 8]$ 3. $(-\infty; +\infty)$ 4. $[-1; 1]$

Решение. В силу ограниченности функции косинус и свойств неравенств имеем:

$$-1 \leq \cos x \leq 1 \Leftrightarrow 6 \leq 7 + \cos x \leq 8.$$

Правильный ответ: 1.

А8. Решите уравнение $\cos x - 1 = 0$.

1. $\frac{\pi}{2} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$ 2. $\frac{\pi}{2} + \pi k, k \in \mathbb{Z}$ 3. $\pi k, k \in \mathbb{Z}$ 4. $2\pi k, k \in \mathbb{Z}$

Решение. Последовательно получаем:

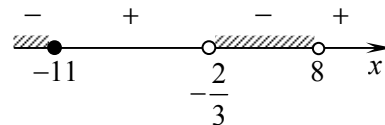
$$\cos x - 1 = 0 \Leftrightarrow \cos x = 1 \Leftrightarrow x = 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$$

Правильный ответ: 4.

A9. Решите неравенство $\frac{x+11}{(x-8)(3x+2)} \leq 0$.

1. $\left[-11; -\frac{2}{3}\right) \cup (8; +\infty)$ 2. $(-\infty; -11]$ 3. $(-\infty; 8)$ 4. $(-\infty; -11] \cup \left(-\frac{2}{3}; 8\right)$

Решение. Решим неравенство $\frac{x+11}{(x-8)(3x+2)} \leq 0$ методом интервалов (см. рис.):



Правильный ответ: 4.

A10. Найдите область определения функции $f(x) = \frac{11}{2 + \log_3 x}$.

1. $(0; 9) \cup (9; +\infty)$ 2. $\left(-\infty; \frac{1}{9}\right) \cup \left(\frac{1}{9}; +\infty\right)$ 3. $(0; +\infty)$ 4. $\left(0; \frac{1}{9}\right) \cup \left(\frac{1}{9}; +\infty\right)$

Решение. Область определения функции задается соотношением $2 + \log_3 x \neq 0$. Тогда:

$$2 + \log_3 x \neq 0 \Leftrightarrow \log_3 x \neq -2 \Leftrightarrow \begin{cases} x > 0, \\ x \neq 3^{-2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0 < x < \frac{1}{9}, \\ x > \frac{1}{9}. \end{cases}$$

Правильный ответ: 4.

Часть В

B1. Решите уравнение $\sqrt{2x^2 + 2x - 3} + 1 = -x$.

Решение. Используем теорему равносильности $\sqrt{f(x)} = g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) = g^2(x), \\ g(x) \geq 0. \end{cases}$

В нашем случае:

$$\begin{aligned} \sqrt{2x^2 + 2x - 3} + 1 = -x &\Leftrightarrow \sqrt{2x^2 + 2x - 3} = -x - 1 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \begin{cases} -x - 1 \geq 0, \\ 2x^2 + 2x - 3 = (-x - 1)^2 \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} x \leq -1, \\ x^2 - 4 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq -1, \\ x = -2, \Leftrightarrow x = -2. \\ x = 2 \end{cases} \end{aligned}$$

Ответ: $\{-2\}$.

В2. Решите уравнение $\left(\frac{1}{16}\right)^{\frac{1}{2}x+1} = 8$.

Решение. Перейдем к одному основанию и воспользуемся монотонностью показательной функции:

$$\left(\frac{1}{16}\right)^{\frac{1}{2}x+1} = 8 \Leftrightarrow (2^{-4})^{\frac{1}{2}x+1} = 2^3 \Leftrightarrow -2x-4=3 \Leftrightarrow x=-3,5.$$

Ответ: $\{-3,5\}$.

В3. Точка движется по координатной прямой согласно закону $x(t) = 7 + 5t - e^{4-t}$, где $x(t)$ — координата точки в момент времени t . Найдите скорость точки при $t = 4$.

Решение. Скорость точки в момент времени t равна $x'(t) = 5 + e^{4-t}$. При $t = 4$ получаем

$$x'(4) = 5 + e^{4-4} = 5 + e^0 = 5 + 1 = 6.$$

Ответ: 6.

В4. Вычислите: $(11,2\sqrt[3]{64\sqrt{8}} - 3,2\sqrt{8\sqrt[3]{64}})^{\frac{6}{11}}$.

Решение. Применяя формулы $\sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}}$, $a^n \cdot a^m = a^{m+n}$, $(a^m)^n = a^{mn}$, последовательно получаем:

$$\begin{aligned} (11,2\sqrt[3]{64\sqrt{8}} - 3,2\sqrt{8\sqrt[3]{64}})^{\frac{6}{11}} &= (11,2(8^2 \cdot 8^{\frac{1}{2}})^{\frac{1}{3}} - 3,2 \cdot (8 \cdot 8^{\frac{2}{3}})^{\frac{1}{2}})^{\frac{6}{11}} = \\ &= (11,2 \cdot 8^{\left(2+\frac{1}{2}\right)\frac{1}{3}} - 3,2 \cdot 8^{\left(1+\frac{2}{3}\right)\frac{1}{2}})^{\frac{6}{11}} = (11,2 \cdot 8^{\frac{5}{6}} - 3,2 \cdot 8^{\frac{5}{6}})^{\frac{6}{11}} = (8 \cdot 8^{\frac{5}{6}})^{\frac{6}{11}} = (8^{\frac{11}{6}})^{\frac{6}{11}} = 8. \end{aligned}$$

Ответ: 8.

В5. Найдите значение функции $y = \sqrt{3} \sin 2t + \sin\left(\frac{17\pi}{2} - t\right)$ в точке $t = \frac{19\pi}{3}$.

Решение. Поскольку

$$\sin\left(\frac{17\pi}{2} - t\right) = \sin\left(8\pi + \frac{\pi}{2} - t\right) = \sin\left(\frac{\pi}{2} - t\right) = \cos t,$$

имеем:

$$y = \sqrt{3} \sin 2t + \cos t.$$

Тогда

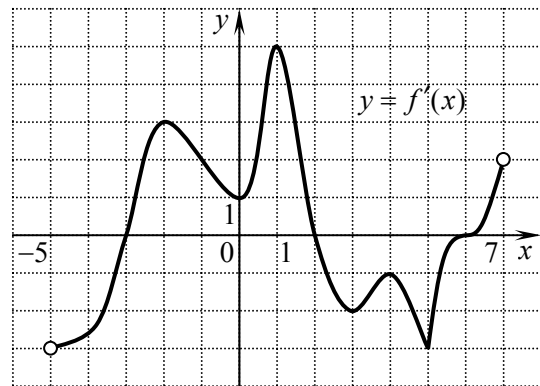
$$\begin{aligned} y\left(\frac{19\pi}{3}\right) &= \sqrt{3} \sin \frac{38\pi}{3} + \cos \frac{19\pi}{3} = \sqrt{3} \sin\left(12\pi + \frac{2\pi}{3}\right) + \cos\left(6\pi + \frac{\pi}{3}\right) = \\ &= \sqrt{3} \sin \frac{2\pi}{3} + \cos \frac{\pi}{3} = \sqrt{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2} = 2. \end{aligned}$$

Ответ: 2.

В6. Функция $y = f(x)$ определена на промежутке $(-5; 7)$. График ее производной изображен на рисунке. Найдите промежутки убывания функции $y = f(x)$. В ответе укажите наибольшую из длин этих промежутков.

Решение. Интервалы убывания функции $f(x)$ совпадают с интервалами, на которых ее производная отрицательна. Производная отрицательна на интервалах $(-5; -3)$ и $(2; 6)$, длины которых соответственно равны 2 и 4. Наибольшая длина — 4.

Ответ: 4.



В7. Найдите наибольший корень уравнения $(3^{2,5-2x^2} - \sqrt{3}) \cdot \log_5(3-10x) = 0$.

Решение. Произведение равно нулю, если один из множителей равен нулю, а остальные при этом определены. Так как множитель $3^{2,5-2x^2} - \sqrt{3}$ определен при любых значениях x , имеем:

$$\text{а) } \log_5(3-10x) = 0 \Leftrightarrow 3-10x = 1 \Leftrightarrow x = 0,2;$$

$$\text{б) } \begin{cases} 3^{2,5-2x^2} - \sqrt{3} = 0 \\ 3-10x > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3^{2,5-2x^2} = 3^{0,5} \\ x < 0,3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2,5-2x^2 = 0,5 \\ x < 0,3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 = 1 \\ x < 0,3 \end{cases} \Leftrightarrow x = -1.$$

Большой корень исходного уравнения — число 0,2.

Ответ: 0,2.

В8. Найдите значение функции $y(x) = \frac{g(x) + f(-x) + 2g(-x)}{5f(x)}$ в точке x_0 , если известно, что функция $y = f(x)$ четная, функция $y = g(x)$ нечетная, $f(x_0) = 1$, $g(x_0) = -3$.

Решение. В силу четности $y = f(x)$ имеем: $f(-x_0) = f(x_0) = 1$. В силу нечетности $y = g(x)$ имеем: $g(-x_0) = -g(x_0) = 3$. Тогда

$$y(x_0) = \frac{g(x_0) + f(-x_0) + 2g(-x_0)}{5f(x_0)} = \frac{-3 + 1 + 2 \cdot 3}{5 \cdot 1} = \frac{4}{5} = 0,8.$$

Ответ: 0,8.

В9. Двум сотрудникам издательства поручили отредактировать рукопись объемом 560 страниц. Один сотрудник, отдав второму 80 страниц рукописи, взял остальные себе. Второй выполнил свою работу за время, в 8 раз меньшее, чем первый свою. Сколько страниц рукописи первый сотрудник должен был сразу отдать второму (взяв себе остальные), чтобы они, работая с прежней производительностью, выполнили свою работу за одинаковое время?

Решение (1 способ). Если второй сотрудник выполнил свою работу за x дней, то он редактировал по $\frac{80}{x}$ страниц в день, а первый — по $\frac{560-80}{8x} = \frac{60}{x}$ страниц в день. Поэтому первому сотруднику

нужно было разделить 560 страниц в отношении $\frac{60}{x} : \frac{80}{x} = 3:4$ и отдать из них четыре части,

т. е. $560 \cdot \frac{4}{3+4} = 320$ страниц, второму сотруднику.

Решение (2 способ). Второй сотрудник редактировал 80 страниц рукописи за время в восемь раз меньшее, чем первый 480 страниц рукописи. Если бы они работали с одной скоростью, то за время, в восемь раз меньшее, он должен был бы отредактировать 60 страниц. Значит, он работает со скоростью $\frac{80}{60} = \frac{4}{3}$ скорости первого работника, и для того чтобы они закончили одновременно, работа должны быть разделена между ними в отношении 4:3. Таким образом, первый сотрудник должен отдать второму $\frac{4}{7} \cdot 560 = 320$ страниц.

Ответ: 320.

В10. Через образующую BC цилиндра проведено сечение $BCDE$. Объем цилиндра равен 1440π , $BE = 8$, тангенс угла между прямой CE и плоскостью основания равен $1,25$. Найдите площадь осевого сечения.

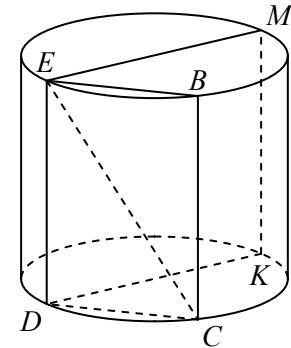
Решение.

1. Имеем: $DE \perp CD$, EC — наклонная, CD — ее проекция на плоскость основания, угол ECD — угол между прямой CE и плоскостью основания. Тогда, учитывая $CD = BE = 8$, из прямоугольного треугольника ECD находим: $DE = CD \cdot \operatorname{tg} \angle ECD = 8 \cdot 1,25 = 10$.

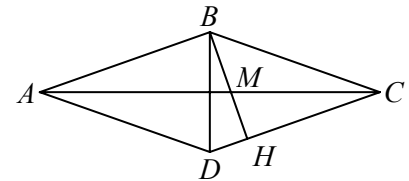
2. Поскольку $V_{\text{цил.}} = 1440\pi$ и $V_{\text{цил.}} = \pi R^2 H$, имеем: $\pi R^2 \cdot ED = 1440\pi$, откуда $R = 12$.

3. Пусть $EDKM$ — осевое сечение цилиндра. Поскольку $EDKM$ — прямоугольник и $EM = 2R = 24$, имеем: $S_{EDKM} = DE \cdot EM = 10 \cdot 24 = 240$.

Ответ: 240.



В11. Дан ромб $ABCD$ с острым углом A . Высота BH , проведенная к стороне CD , пересекает диагональ AC в точке M . Найдите площадь треугольника CMH , если высота ромба равна 8, а площадь ромба равна 80.



Решение.

1. Найдем сторону ромба: $S_{\text{ромба}} = DC \cdot BH$, откуда $80 = DC \cdot 8$, $DC = 10$.

2. Из прямоугольного треугольника BCH находим $CH = \sqrt{BC^2 - BH^2} = \sqrt{100 - 64} = 6$.

3. В треугольнике BCH отрезок CM — биссектриса. Биссектриса треугольника делит сторону, к которой она проведена на отрезки, пропорциональные прилежащим сторонам:

$$\frac{MH}{BM} = \frac{CH}{BC} = \frac{6}{10} = \frac{3}{5}, \text{ откуда } \frac{MH}{BH} = \frac{3}{8}.$$

4. Отрезок CH — общая высота треугольников CMH и CBH , следовательно, отношение площадей этих треугольников равно отношению их оснований MH и BH :

$$\frac{S_{CMH}}{S_{CBH}} = \frac{MH}{BH} = \frac{3}{8}, \text{ откуда } S_{CMH} = \frac{3}{8} S_{CBH} = \frac{3}{8} \cdot \frac{1}{2} \cdot CH \cdot BH = \frac{3}{8} \cdot \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 8 = 9.$$

Ответ: 9.

Часть С

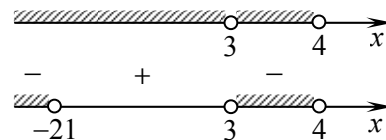
С1. Найдите все значения x , для которых точки графика функции $y = \frac{\log_{0,2}(20-5x)}{12-4x}$ лежит ниже

соответствующих точек графика функции $y = -\frac{3}{12-4x}$.

Решение. Множество искомых значений x совпадает со множеством решений неравенства $\frac{\log_{0,2}(20-5x)}{12-4x} < -\frac{3}{12-4x}$, решая которое, последовательно получаем:

$$\frac{\log_{0,2}(20-5x)}{12-4x} < -\frac{3}{12-4x} \Leftrightarrow \frac{\log_{0,2}(20-5x)}{12-4x} + \frac{3}{12-4x} < 0 \Leftrightarrow \frac{\log_{0,2}(20-5x)+3}{12-4x} < 0.$$

Решим последнее неравенство методом интервалов (на рисунке на первой оси отмечена область определения неравенства, задаваемая соотношениями $20-5x > 0$ и $12-4x \neq 0$, а на второй — корни числителя и знаменателя):



$$x < -21, \quad 3 < x < 4$$

Ответ: $(-\infty; -21) \cup (3; 4)$.

С2. Решите уравнение $\sqrt{16-8x+x^2} + \sqrt{4x^2-13x-17} = x-4$.

Решение. Заметим, что $\sqrt{16-8x+x^2} = \sqrt{(4-x)^2} = |4-x|$. Тогда:

$$\sqrt{16-8x+x^2} + \sqrt{4x^2-13x-17} = x-4 \Leftrightarrow |4-x| + \sqrt{4x^2-13x-17} = x-4 \Leftrightarrow$$

Поскольку правая часть полученного уравнения должна быть неотрицательна, имеем условие:

$$x-4 \geq 0, \text{ откуда } |4-x| = x-4 \text{ и уравнение принимает вид } \sqrt{4x^2-13x-17} = 0, \text{ где } x \geq 4 \quad (*)$$

Далее имеем:

$$\sqrt{4x^2-13x-17} = 0 \Leftrightarrow 4x^2-13x-17 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1, \\ x = \frac{17}{4}. \end{cases} \text{ Условию } (*) \text{ отвечает число } \frac{17}{4}.$$

Ответ: $\frac{17}{4}$

С3. Найдите все значения a , при каждом из которых наибольшее из двух чисел $b = 9^a + 3^{2+a} - 1$ и $c = 3^{2-a} - 9^{-a} - 5$ меньше 9.

Решение. Наибольшее из двух чисел меньше девяти тогда и только тогда, когда каждое из них меньше 9 (если числа равны друг другу, наибольшим считается каждое из них).

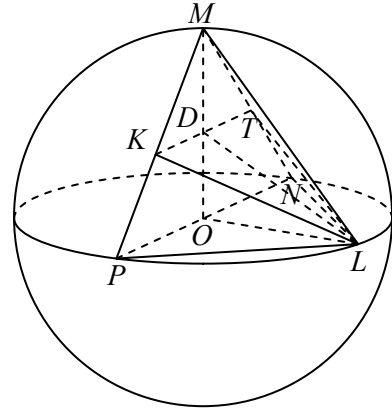
Таким образом, имеем:

$$\begin{aligned} \begin{cases} 9^a + 3^{2+a} - 1 < 9, \\ 3^{2-a} - 9^{-a} - 5 < 9 \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} 9^a + 9 \cdot 3^a - 10 < 0, \\ 9^{-a} + 9 \cdot 3^{-a} - 14 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (3^a - 1)(3^a + 10) < 0, \\ (3^{-a} - 2)(3^{-a} - 7) > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3^a - 1 < 0, \\ (3^{-a} - 2)(3^{-a} - 7) > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} 3^a < 1, \\ 3^{-a} < 2; \\ 3^{-a} > 7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3^{-a} > 1, \\ 3^{-a} < 2; \\ 3^{-a} > 7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1 < 3^{-a} < 2; \\ 3^{-a} > 7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1 < -a < \log_3 2, \\ -a > \log_3 7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -\log_3 2 < a < -1, \\ a < -\log_3 7. \end{cases} \end{aligned}$$

Ответ: $a \in (-\infty; -\log_3 7) \cup (-\log_3 2; 0)$.

С4. Отрезок PN , равный 8, – диаметр сферы. Точки M и L лежат на сфере так, что объем пирамиды $PNML$ наибольший. Найдите площадь треугольника KLT , где K и T – середины ребер PM и NM соответственно.

Решение. Примем треугольник LNP за основание пирамиды $PNML$, а отрезок PN – за основание треугольника LNP (см.рис). Тогда объем пирамиды $PNML$ можно вычислить по формуле $V = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot PN \cdot h \cdot H = \frac{1}{3} RhH$, где R – радиус данной сферы, h – высота треугольника LNP , проведенная из вершины L , H – высота пирамиды $PNML$. Поскольку PN – диаметр данной сферы, а точка L лежит на сфере, треугольник LNP – прямоугольный треугольник, вписанный в окружность, радиус которой равен радиусу R данной сферы. Следовательно, наибольшее значение высоты h треугольника LNP равно R . Плоскость LNP отсекает от данной сферы полушару, следовательно, наибольшее расстояние от точек сферы до этой плоскости также равно радиусу сферы, откуда R – наибольшее значение высоты H пирамиды $PNML$. Таким образом, пирамида $PNML$ имеет наибольший объем, если треугольники PLN и PMN прямоугольные, равнобедренные треугольники с общей гипотенузой PN , лежащие во взаимно перпендикулярных плоскостях (см. рис.).



Далее имеем:

- 1) Треугольники LON , LOP , LOM , POM , NOM равны по двум катетам.
- 2) Треугольники LMN и LMP – равносторонние треугольники со стороной $NL = PL = ON\sqrt{2} = 4\sqrt{2}$.

Медианы LK и LT этих треугольников равны: $LK = LT = \frac{PL\sqrt{3}}{2} = 2\sqrt{6}$.

- 3) Поскольку KT – средняя линия треугольника PMN прямая KT параллельна прямой PN и $KT = \frac{1}{2}PN = R = 4$. В свою очередь, прямая PN перпендикулярна двум пересекающимся прямым MO и OL плоскости MOL , значит, она перпендикулярна самой этой плоскости. Тогда прямая KT также перпендикулярна плоскости MOL , а, значит, и прямой LD , лежащей в этой плоскости.

- 4) Треугольник KLT равнобедренный, и его высота LD является медианой прямоугольного равнобедренного треугольника LOM , откуда $LD = \sqrt{LO^2 + OD^2} = 2\sqrt{5}$.

Окончательно находим:

$$S_{KLT} = \frac{1}{2} KT \cdot LD = \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 2\sqrt{5} = 4\sqrt{5}.$$

Ответ: $4\sqrt{5}$.

С5. Даны два уравнения $\log_7(x(12 + \sqrt{-p})) = p(p-1) - 6x + 3$ и $2x - \frac{25}{x} = \frac{x^2 - (5p-3)x + 15}{x(p+1)}$. Значение параметра p выбирается так, что $p \leq 0$, $p \neq -1$ и число различных корней первого уравнения в сумме с числом $p + 5$ дает число различных корней второго уравнения. Решите первое уравнение при каждом значении параметра, выбранном таким образом.

Решение.

Умножив обе части уравнения $2x - \frac{25}{x} = \frac{x^2 - (5p-3)x + 15}{x(p+1)}$ на общий знаменатель $x(p+1)$, получаем $2x^2(p+1) - 25(p+1) = x^2 - (5p-3)x + 15 \Leftrightarrow (2p+1)x^2 + (5p-3)x - 5(5p+8) = 0$.

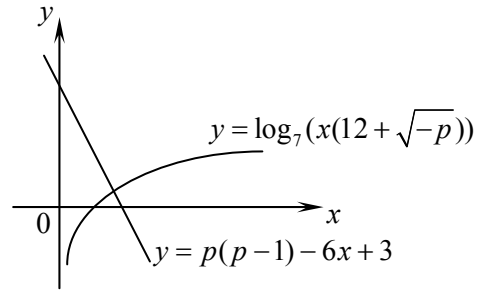
По смыслу задачи p – целое отрицательное число, отличное от минус единицы и, кроме того, $x = 0$ не является корнем уравнения $(2p+1)x^2 + (5p-3)x - 5(5p+8) = 0$, следовательно, это уравнение равносильно данному уравнению.

Далее имеем:

$$(2p+1)x^2 + (5p-3)x - 5(5p+8) = 0 \Leftrightarrow (x+5)((2p+1)x - (5p+8)) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -5; \\ (2p+1)x = 5p+8. \end{cases}$$

Таким образом, корнями рассматриваемого уравнения являются решения уравнения $(2p+1)x = 5p+8$ и число -5 . Поскольку коэффициент при x в уравнении $(2p+1)x = 5p+8$ отличен от нуля при всех допустимых значениях параметра p , данное уравнение имеет единственное решение, не равное -5 при целых значениях параметра p . Поэтому число различных корней второго уравнения равно 2.

Рассмотрим теперь уравнение $\log_7(x(12+\sqrt{-p})) = p(p-1) - 6x + 3$. Логарифмическая функция с основанием 7 – функция возрастающая и линейная функция $y = x(12+\sqrt{-p})$ – возрастающая функция поскольку $(12+\sqrt{-p}) > 0$, следовательно, сложная функция $y = \log_7(x(12+\sqrt{-p}))$ – также возрастающая функция. С другой стороны, линейная функция $y = p(p-1) - 6x + 3$ – убывающая функция, так как $-6 < 0$ (см. рис). Таким образом, данное уравнение имеет не более одного корня. Ясно, что в нашем случае это корень есть.



По условию число различных корней первого уравнения в сумме с числом $p+5$ дает число различных корней второго уравнения, тогда $1 + (p+5) = 2$, откуда $p = -4$.

Первое уравнение при $p = -4$ принимает вид $\log_7 14x = 23 - 6x$. Подбором находим $x = 3,5$. Как показано ранее, найденный корень единственный.

Ответ: $\{3,5\}$.