Решение заданий варианта ЕГЭ 2006 года

Часть 1

А1. Упростите выражение $\dfrac{3^{1,2}}{3^{0,3}}$.

1. 3^4 **2.** $3^{0,9}$ **3.** $0,9$ **4.** 4

Решение: $\dfrac{3^{1,2}}{3^{0,3}} = 3^{1,2-0,3} = 3^{0,9}$.

Правильный ответ: 2.

А2. Найдите значение выражения $-2\log_3(3)^5$.

1. 5^{-2} **2.** -10 **3.** 3 **4.** -32

Решение: $-2\log_3(3)^5 = -2\cdot 5\cdot \log_3 3 = -10\cdot 1 = -10$.

Правильный ответ: 2.

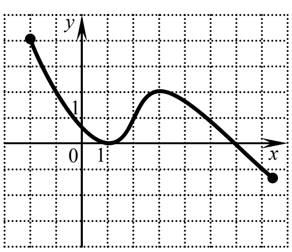
А3. Вычислите: $\sqrt[4]{625\cdot 0,0081}$.

1. $5,3$ **2.** $0,75$ **3.** $1,5$ **4.** $0,015$

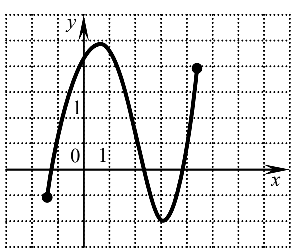
Решение: $\sqrt[4]{625\cdot 0,0081} = \sqrt[4]{5^4\cdot 0,3^4} = 5\cdot 0,3 = 1,5$.

Правильный ответ: 3.

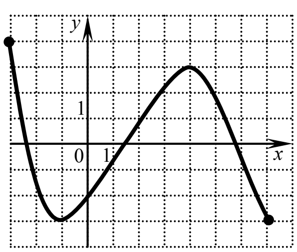
А4. На каком из следующих рисунков изображен график функции, возрастающей на промежутке [0; 2]?



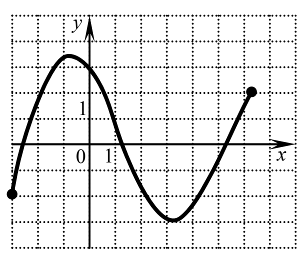
1.



2.



3.



4.

Решение: только на графике 3 изображен график функции $y = f(x)$ такой, что для любых $x_1, x_2 \in [0;2]$ выполняется условие $x_2 > x_1 \Rightarrow f(x_2) > f(x_1)$.

Правильный ответ: 3.

A5. Найдите множество значений функции $y=\frac{7}{3}\cos x$.

1. $[-1;\,1]$ **2.** $\left[-\frac{7}{3};\,\frac{7}{3}\right]$ **3.** $\left[0;\,\frac{7}{3}\right]$ **4.** $(-\infty;\,+\infty)$

Решение: $-1\le\cos x\le 1\Leftrightarrow\frac{7}{3}\cdot(-1)\le\frac{7}{3}\cdot\cos x\le\frac{7}{3}\cdot 1\Leftrightarrow-\frac{7}{3}\le\frac{7}{3}\cos x\le\frac{7}{3}$.

Правильный ответ: 2.

A6. Найдите область определения функции $f(x)=\frac{21}{8-\sqrt{x}}$.

1. $[0;\,8)\cup(8;\,+\infty)$ **2.** $[0;\,+\infty)$ **3.** $(-\infty;\,64)\cup(64;\,+\infty)$ **4.** $[0;\,64)\cup(64;\,+\infty)$

Решение: $8-\sqrt{x}\ne 0\Leftrightarrow\sqrt{x}\ne 8\Leftrightarrow\begin{cases}x\ne 64,\\ x\ge 0\end{cases}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}0\le x<64,\\ x>64.\end{array}\right.$

Правильный ответ: 4.

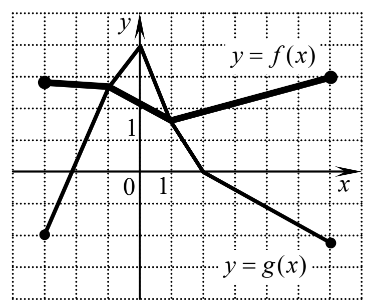
A7. На рисунке изображены графики функций $y=f(x)$ и $y=g(x)$, заданных на промежутке $[-3;\,6]$. Укажите те значения x, для которых выполняется неравенство $f(x)\le g(x)$.

1. $[-3;\,-1]\cup[1;\,6]$

2. $[-3;\,-2]\cup[2;\,6]$

3. $[-1;\,1]$

4. $[-2;\,2]$



Решение. График функции $y=f(x)$ расположен не выше графика функции $y=g(x)$ при всех значениях x из промежутка $[-1;\,1]$ и только при них. Следовательно, промежуток $[-1;\,1]$ является множеством решений данного неравенства.

Правильный ответ: 3.

A8. Найдите производную функции $y=\frac{7}{6}x^6-5x^4-17$.

1. $y'=7x^5-20x^3$ **2.** $y'=\frac{1}{6}x^7-x^5-17x$ **3.** $y'=7x^7-x^5-17x$ **4.** $y'=7x^5-9x^3$

Решение:

$$y'=\left(\frac{7}{6}x^6-5x^4-17\right)'=\left(\frac{7}{6}x^6\right)'-(5x^4)'-(17)'=\frac{7}{6}\cdot 6\cdot x^{6-1}-5\cdot 4\cdot x^{4-1}-0=7x^5-20x^3.$$

Правильный ответ: 1.

А9. Решите уравнение $\operatorname{tg} 4x = \frac{\sqrt{3}}{3}$.

1. $\frac{2\pi}{3} + 4\pi n, n \in \mathbb{Z}$ **2.** $\frac{\pi}{24} + \pi n, n \in \mathbb{Z}$ **3.** $\frac{\pi}{6} + \pi n, n \in \mathbb{Z}$ **4.** $\frac{\pi}{24} + \frac{\pi}{4} n, n \in \mathbb{Z}$

Решение: $\operatorname{tg} 4x = \frac{\sqrt{3}}{3} \Leftrightarrow 4x = \frac{\pi}{6} + \pi n, n \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{24} + \frac{\pi}{4} n, n \in \mathbb{Z}$.

Правильный ответ: 4.

А10. Решите неравенство $\log_{\frac{2}{3}}(3x - 15) > \log_{\frac{2}{3}}(2x)$.

1. $(15; +\infty)$ **2.** $(-\infty; 15)$ **3.** $(5; 15)$ **4.** $(5; +\infty)$

Решение: $\log_{\frac{2}{3}}(3x - 15) > \log_{\frac{2}{3}}(2x) \underset{\frac{2}{3}<1}{\Leftrightarrow} \begin{cases} 3x - 15 > 0, \\ 3x - 15 < 2x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 5, \\ x < 15 \end{cases} \Leftrightarrow 5 < x < 15$.

Правильный ответ: 3.

В1. Решите уравнение $5^{x+2} + 10 \cdot 5^x = 7$.

Решение:

$$5^{x+2} + 10 \cdot 5^x = 7 \Leftrightarrow 5^x \cdot 5^2 + 10 \cdot 5^x = 7 \Leftrightarrow 35 \cdot 5^x = 7 \Leftrightarrow 5^x = \frac{1}{5} \Leftrightarrow 5^x = 5^{-1} \Leftrightarrow x = -1.$$

Ответ: $\{-1\}$.

В2. Решите уравнение $9 \cdot 7^{\log_7 x} = 4x + 3$.

Решение:

$$9 \cdot 7^{\log_7 x} = 4x + 3 \Leftrightarrow \begin{cases} 9x = 4x + 3, \\ x > 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = 0{,}6.$$

Ответ: $\{0{,}6\}$.

В3. Найдите значение выражения $5\cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) - \sin(\pi - \alpha)$, если $\sin\alpha = -0{,}4$.

Решение: $5\cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) - \sin(\pi - \alpha) = 5\sin\alpha - \sin\alpha = 4\sin\alpha\Big|_{\sin\alpha = -0{,}4} = -1{,}6$.

Ответ: $-1{,}6$.

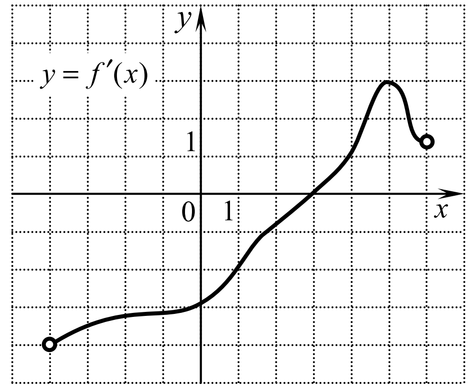
Часть 2

В4. Вычислите: $13\log_{9\sqrt[6]{3}}(27\sqrt[6]{3})$.

Решение: $13\log_{9\sqrt[6]{3}}(27\sqrt[6]{3}) = 13\log_{3^2 \cdot 3^{\frac{1}{6}}}\left(3^3 \cdot 3^{\frac{1}{6}}\right) = 13\log_{3^{\frac{13}{6}}}\left(3^{\frac{19}{6}}\right) = 13 \cdot \frac{19}{6} \cdot \frac{6}{13} = 19$.

Ответ: 19.

B5. К графику функции $y = f(x)$ в точке с абсциссой $x_0 = 1$ проведена касательная. Найдите ее угловой коэффициент, если на рисунке изображен график производной этой функции.



Решение. Угловой коэффициент k касательной к графику функции $y = f(x)$ в точке с абсциссой x_0 равен значению производной этой функции в точке x_0. В нашем случае $k = f'(1) = -2$ (см. рис.).

Ответ: -2.

B6. Найдите разность между наибольшим и наименьшим значениями функции $y = 2^{(x+1)^2-3}$ на отрезке $[-3; 0]$.

Решение. Парабола $y = (x+1)^2 - 3$, ветви которой направлены вверх, имеет вершину в точке $(-1; -3)$, следовательно, функция $f(x) = (x+1)^2 - 3$ убывает на отрезке $[-3; -1]$ и возрастает на отрезке $[-1; 0]$. Имеем: $f(-3) = 1,\ f(-1) = -3,\ f(0) = -2$. Показательная функция с основанием, большим единицы, — функция возрастающая, откуда

$$\max_{[-3;\,0]}(2^{f(x)}) = 2^1 = 2,.\ \min_{[-3;\,0]}(2^{f(x)}) = 2^{-3} = \frac{1}{8} = 0{,}125.$$

Искомая разность равна $2 - 0{,}125 = 1{,}875$.

Ответ: 1,875.

B7. Решите уравнение $16x^2 - 24x + 12 = \left(\sqrt{3} - \sin\frac{8\pi x}{3}\right)\left(\sqrt{3} + \sin\frac{8\pi x}{3}\right)$.

Решение. Раскроем скобки в правой части уравнения:

$$16x^2 - 24x + 12 = \left(\sqrt{3} - \sin\frac{8\pi x}{3}\right)\left(\sqrt{3} + \sin\frac{8\pi x}{3}\right) \Leftrightarrow 16x^2 - 24x + 12 = 3 - \sin^2\frac{8\pi x}{3}.$$

Парабола $y = 16x^2 - 24x + 12$, ветви которой направлены вверх, имеет вершину в точке $(x_0; y_0)$, где

$$x_0 = -\frac{b}{2a} = \frac{24}{2\cdot 16} = \frac{3}{4},\ y_0 = y(x_0) = 3.$$

Следовательно, $16x^2 - 24x + 12 \ge 3$.

С другой стороны, имеем: $\sin^2\frac{8\pi x}{3} \ge 0 \Rightarrow 3 - \sin^2\frac{8\pi x}{3} \le 3$.

Таким образом, данное уравнение равносильно системе:

$$\begin{cases} 16x^2 - 24x + 12 = 3, \\ 3 - \sin^2\dfrac{8\pi x}{3} = 3. \end{cases}$$

Единственное решение первого уравнения системы, $x = \frac{3}{4}$, удовлетворяет второму уравнению. Следовательно, это решение системы.

Ответ: 0,75.

B8. Найдите значение функции $y = f(x)g(-x) + 2f(-x)$ в точке x_0, если известно, что функция $y = f(x)$ — четная, функция $y = g(x)$ — нечетная, $f(x_0) = 2$, $g(x_0) = -3$.

Решение. По условию, функция $y = f(x)$ — четная, а функция $y = g(x)$ — нечетная, следовательно, $f(-x) = f(x)$, $g(-x) = -g(x)$.

Тогда данная функция $y = f(x)g(-x) + 2f(-x)$ принимает вид $y = -f(x)g(x) + 2f(x)$, откуда находим: $-f(x_0)g(x_0) + 2f(x_0) = -2\cdot(-3) + 2\cdot 2 = 10$.

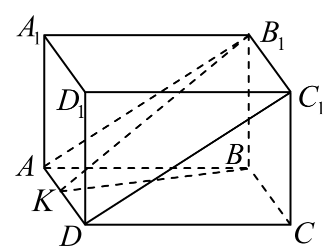
Ответ: 10.

B9. Объемы ежегодной добычи угля первой, второй и третьей шахтами относятся как 1:2:4. Первая шахта планирует уменьшить годовую добычу угля на 8%, а вторая — на 2%. На сколько процентов должна увеличить годовую добычу угля третья шахта, чтобы суммарный объем добываемого за год угля не изменился?

Решение. Примем объем ежегодной добычи угля первой шахтой за a, тогда объемы ежегодной добычи угля второй и третьей шахтами равны соответственно $2a$ и $4a$, а суммарный объем ежегодной добычи угля равен $7a$. После уменьшения годовой добычи угля первой шахтой на 8%, а второй на 2% объем добываемого им угля будет равен $0,92\cdot a + 0,98\cdot 2a = 2,88a$ и на «долю» третьей шахты останется $7a - 2,88a = 4,12a$. Пусть n — то количество процентов, на которое нужно увеличить годовую добычу угля третьей шахтой, чтобы суммарный объем добываемого за год угля не изменился. Тогда имеем $(1+0,01n)\cdot 4a = 4,12a$, откуда $1+0,01n = 1,03$ и, окончательно, $n = 3$.

Ответ: 3.

B10. Основание прямой призмы $ABCDA_1B_1C_1D_1$ — параллелограмм $ABCD$, в котором $CD = 5$, $\angle ADC = 150°$. Высота призмы равна 2. Найдите тангенс угла между плоскостью основания призмы и плоскостью B_1AD.



Решение. Построим высоту BK параллелограмма $ABCD$ и соединим отрезком точки B_1 и K (см. рисунок). Поскольку $ABCDA_1B_1C_1D_1$ — прямая призма, $B_1B \perp (ABC)$. Значит, BK — проекция наклонной B_1K на плоскость ABC, и, на основании теоремы о трех перпендикулярах, $B_1K \perp AD$. Следовательно, угол B_1KB — линейный угол двугранного угла B_1ADB. Основание данной призмы — параллелограмм $ABCD$, откуда, на основании свойств параллелограмма, $AB = CD = 5$, $\angle BAD = 180° - \angle ADC = 30°$.

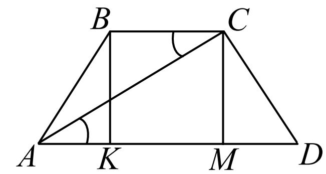
Далее находим:

а) из прямоугольного треугольника ABK: $BK = AB\sin\angle BAD = 5\cdot\sin 30° = 2,5$;

б) из прямоугольного треугольника B_1KB: $\operatorname{tg}\angle B_1KB = \frac{B_1B}{BK} = \frac{2}{2,5} = 0,8$.

Ответ: 0,8.

B11. Найдите площадь равнобедренной трапеции, если ее средняя линия равна 6, а косинус угла между диагональю и основанием равен $\frac{3}{\sqrt{10}}$.



Решение. Пусть $ABCD$ — данная трапеция ($AD \parallel BC$), отрезки BK и CM — ее высоты (см. рисунок). Поскольку $ABCD$ — равнобедренная трапеция, $AK = MD = \frac{AD - BC}{2}$, откуда

$$AM = AD - MD = AD - \frac{AD - BC}{2} = \frac{AD + BC}{2}.$$

Таким образом, отрезок AM равен средней линии трапеции и, следовательно, $S_{ABCD} = AM \cdot CM$.

Из прямоугольного треугольника ACM находим:

$$AC = \frac{AM}{\cos\angle CAM} = \frac{6 \cdot \sqrt{10}}{3} = 2\sqrt{10}\text{; } CM = \sqrt{AC^2 - AM^2} = \sqrt{4 \cdot 10 - 36} = 2.$$

Окончательно имеем: $S_{ABCD} = 6 \cdot 2 = 12$.

Ответ: 12.

C1. Решите уравнение $\sin 1,5x = \left(\sqrt{9 - x^2}\right)^2 + x^2 - 10$

Решение. Область допустимых значений (ОДЗ) задается неравенством $9 - x^2 \geq 0$, решая которое, получаем $-3 \leq x \leq 3$. На этом множестве имеем:

$$\sin 1,5x = (\sqrt{9 - x^2})^2 + x^2 - 10 \Leftrightarrow \sin 1,5x = 9 - x^2 + x^2 - 10 \Leftrightarrow \sin 1,5x = -1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 1,5x = -\frac{\pi}{2} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow x = -\frac{\pi}{3} + \frac{4\pi k}{3}, k \in \mathbb{Z}.$$

Далее имеем:

а) если $k \leq -1$, то $x \leq -\frac{\pi}{3} - \frac{4\pi}{3} = -\frac{5\pi}{3} < -3$;

б) если $k \geq 1$, то $x \geq -\frac{\pi}{3} + \frac{4\pi}{3} = \pi > 3$;

в) если $k = 0$, то $x = -\frac{\pi}{3} \in [-3; 3]$.

Таким образом, $x = -\frac{\pi}{3}$ — единственный корень данного уравнения.

Ответ: $\left\{-\frac{\pi}{3}\right\}$.

Баллы	Критерии оценки выполнения задания C1
2	Приведена верная последовательность всех шагов решения: 1) нахождение области допустимых значений или преобразование данного уравнения в равносильную ему систему; 2) решение уравнения или полученной системы. Все тождественные преобразования и вычисления выполнены верно. Получен верный ответ.

1	Приведена верная последовательность всех шагов решения. Допущена одна описка или вычислительная ошибка, не повлиявшие на ход решения. В результате этой описки (ошибки) может быть получен неверный ответ.
0	Все случаи решения, не соответствующие критериям выставления оценок в 1 и 2 балла.

С2. Найдите все значения x, при каждом из которых расстояние между соответствующими точками графиков функций $f(x)=\log_{\sqrt{5}}(4x-3)$ и $g(x)=5$ меньше, чем 1.

Решение. Искомое множество совпадает с множеством решений неравенства $\left|\log_{\sqrt{5}}(4x-3)-5\right|<1$.

Решим это неравенство:

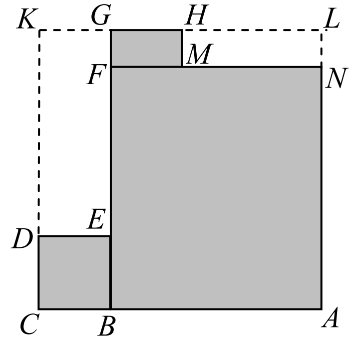
$$\left|\log_{\sqrt{5}}(4x-3)-5\right|<1 \Leftrightarrow -1<\log_{\sqrt{5}}(4x-3)-5<1 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow 4<\log_{\sqrt{5}}(4x-3)<6 \underset{\sqrt{5}>1}{\Leftrightarrow} 25<4x-3<125 \Leftrightarrow 7<x<32.$$

Ответ: (7; 32).

Баллы	Критерии оценки выполнения задания С2
2	Приведена верная последовательность всех шагов решения: 1) составление неравенства, содержащего неизвестное под знаком модуля или системы неравенств, соответствующих условию задачи; 2) решение полученного неравенства (системы неравенств). Все преобразования и вычисления выполнены верно. Получен верный ответ.
1	Приведена верная последовательность всех шагов решения. Допущена одна описка или вычислительная ошибка, не повлиявшие на ход решения. В результате этой описки (ошибки) может быть получен неверный ответ.
0	Все случаи решения, не соответствующие критериям выставления оценок в 1 и 2 балла.

Часть 3

С3. Требуется разметить на земле участок *ACDEGHMN* площадью $1200\,\text{м}^2$, состоящий из трех прямоугольных частей и имеющий форму, изображенную на рисунке, где $EG=30$ м, $HM=5$ м, $MN=20$ м и $DE\ge 10$ м. Найдите наименьшее значение периметра такого участка и какие-либо значения длин *KL*, *AL* и *DE*, при которых периметр является наименьшим.



Решение. Обозначим через x, y и S соответственно длины отрезков *CK*, *KL* и площадь участка *ACDEGHMN*. Тогда периметр P данного участка выражается формулой $P=2(x+y)$.

Оценим площадь xy прямоугольника $ACKL$:

$$S_{ACKL} = S + HM \cdot MN + EG \cdot DE = 1200 + 100 + 30 \cdot DE \geq 1300 + 30 \cdot 10 = 1600.$$

Значит, $xy \geq 1600$, откуда, учитывая $y > 0$, получаем $y \geq \dfrac{1600}{x}$. Следовательно, $P \geq 2\left(x + \dfrac{1600}{x}\right)$.

Найдем наименьшее значение функции $P(x) = 2\left(x + \dfrac{1600}{x}\right)$ на промежутке $(0; +\infty)$ [1]).

На основании теоремы о среднем арифметическом и среднем геометрическом двух неотрицательных чисел получаем

$$\frac{x + \frac{1600}{x}}{2} \geq \sqrt{x \cdot \frac{1600}{x}} \Leftrightarrow x + \frac{1600}{x} \geq 80.$$

При этом равенство достигается, тогда и только тогда, когда $x = \dfrac{1600}{x}$, откуда, учитывая $x > 0$, получаем $x = 40$ [2]).

Таким образом, $P(40) = 160$ — наименьшее значение функции $P(x)$ на промежутке $(0; +\infty)$, и достигается оно при $x = y = 40$. При этом $DE = 10$.

Ответ: 160 м, 40 м, 40 м, 10 м.

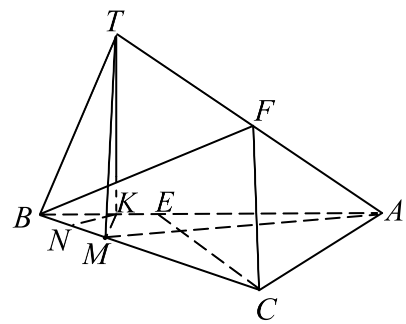
Баллы	Критерии оценки выполнения задания С3
4	Приведена верная последовательность всех шагов решения: 1) составлено выражение для вычисления периметра данного участка и сконструирована функция, наименьшее значение которой требуется найти; 2) найдено наименьшее значение составленной функции; 3) найдено наименьшее значение периметра данного участка и указаны искомые размеры участка, при которых это значение достигается. В случае применения производной приведено обоснование того факта, что исследуемая функция в точке минимума принимает свое наименьшее значение. Все тождественные преобразования и вычисления выполнены верно. Получен верный ответ.
3	Приведена верная последовательность всех шагов решения. В случае применения производной в шаге 2) отсутствует обоснование того факта, что исследуемая функция в точке минимума принимает свое наименьшее значение. Допущена одна описка или вычислительная ошибка, не повлиявшие на ход решения. В результате этой описки (ошибки) может быть получен неверный ответ.

[1]) Учитывая условие $DE \geq 10$, можно более точно указать интересующий нас промежуток: $(10; +\infty)$.

[2]) Исследование функции $P(x) = 2\left(x + \dfrac{1600}{x}\right)$ можно также провести с помощью производной.

2	Верно выполнены шаги 1) и 2), а шаг 3) – либо отсутствует, либо не доведен до конца, либо выполнен неверно. Отсутствует (в случае применения производной) обоснование в шаге 2). Допустима описка или вычислительная ошибка, в результате которой может быть получен неверный ответ.
1	Верно выполнен один из шагов решения, а остальные – либо отсутствуют, либо выполнены неверно.
0	Все случаи решения, не соответствующие критериям выставления оценок в 1 – 4 балла.

С4. В пирамиде *FABC* грани *ABF* и *ABC* перпендикулярны, $FB:FA = 15:11$. Тангенс угла между прямой *BC* и плоскостью *ABF* равен 5. Точка *M* выбрана на ребре *BC* так, что $BM:MC = 4:11$. Точка *T* лежит на прямой *AF* и равноудалена от точек *M* и *B*. Центр сферы, описанной около пирамиды *FABC*, лежит на ребре *AB*, площадь этой сферы равна 36π. Найдите объем пирамиды *ACMT*.



Решение. Опустим перпендикуляры *TK* и *CE* из точек *T* и *C* соответственно на плоскости *ABC* и *ABF* и перпендикуляр *KN* из точки *K* на прямую *BC*, а также построим отрезок *KM* (см. рис.).

Поскольку плоскости *ABF* и *ABC* перпендикулярны, точки *K* и *E* лежат на их линии пересечения — прямой *AB* — и отрезки *TK* и *CE* перпендикулярны *AB*.

Отрезки *BK* и *KM* — проекции равных наклонных *BT* и *MT* на плоскость *ABC*, следовательно, $BK = KM$. Таким образом, отрезок *KN* является высотой равнобедренного треугольника *BKM*, а, следовательно, является и его медианой, откуда $BN = \frac{1}{2}BM = \frac{2}{15}BC$.

Центр сферы, описанной около пирамиды *FABC*, лежит на ребре *AB*, следовательно, *AB* — диаметр 2*R* этой сферы. Так как любое сечение сферы плоскостью есть окружность, углы *AFB* и *ACB* — вписанные углы, опирающиеся на диаметр *AB*, следовательно, $AC \perp BC$ и $AF \perp BF$.

Поскольку *BE* — проекция *BC* на плоскость *ABF*, угол *CBE* является углом между прямой *BC* и плоскостью *ABF*.

Далее имеем:

1. По условию, площадь сферы, описанной около пирамиды *FABC*, равна 36π, откуда $4\pi R^2 = 36\pi$, $R = 3$, $AB = 6$.

2. Прямые *KN* и *AC* параллельны, так как они лежат в одной плоскости и перпендикулярны одной прямой *BC*, следовательно, $\Delta KBN \sim \Delta ABC$, откуда $\frac{BK}{AB} = \frac{BN}{BC} = \frac{2}{15}$, $BK = \frac{2}{15}AB$, а, значит, $AK = \frac{13}{15}AB = \frac{26}{5}$.

3. В прямоугольном треугольнике *ABC* тангенс угла *B* равен 5, следовательно, $AC = 5BC$. Тогда

$$BC^2 + AC^2 = AB^2,\ BC^2 + 25BC^2 = 36,\ BC^2 = \frac{18}{13},\ S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2}BC \cdot AC = \frac{5}{2}BC^2 = \frac{45}{13}.$$

4. Треугольники *ABC* и *AMC* имеют общую высоту *AC*, следовательно, отношение их площадей равно отношению оснований *MC* и *BC*, откуда получаем

$$\frac{S_{\Delta AMC}}{S_{\Delta ABC}} = \frac{MC}{BC} = \frac{11}{15},\ S_{\Delta AMC} = \frac{11}{15} \cdot \frac{45}{13} = \frac{33}{13}.$$

5. Прямоугольные треугольники ATK и ABF подобны, так как имеют общий острый угол A, следовательно, $\frac{KT}{FB} = \frac{AK}{FA}$, откуда $KT = \frac{FB}{FA} \cdot AK = \frac{15}{11} \cdot \frac{26}{5} = \frac{78}{11}$.

Окончательно имеем: $V_{ACMT} = \frac{1}{3} S_{\Delta ACM} KT = \frac{33 \cdot 78}{3 \cdot 13 \cdot 11} = 6$.

Ответ: 6.

Баллы	Критерии оценки выполнения задания С4
4	Приведена верная последовательность всех шагов решения: 1) указано положение оснований перпендикуляров TK и CE, опущенных из точек T и C на плоскости ABC и ABF соответственно; 2) установлено равенство отрезков BK и KM, а также параллельность отрезков KN и AC; 3) указано положение центра сферы, описанной около пирамиды $FABC$; 4) установлена перпендикулярность отрезков AC и BC, AF и BF соответственно; 5) указан угол между прямой BC и плоскостью ABF; 6) вычислен искомый объем пирамиды $ACMT$. Верно приведены ссылки на используемые при доказательстве положения теории: а) свойство перпендикулярных плоскостей; б) свойства проекций и их наклонных; в) определение угла между прямой и плоскостью; г) свойство площадей треугольника; д) признаки подобия треугольников; е) свойство вписанного угла. Все преобразования и вычисления выполнены верно. Получен верный ответ.
3	Приведены все шаги решения 1) – 6). Приведены ссылки на используемые при доказательстве положения теории а) – е). Допустимы отсутствие обоснований некоторых ключевых моментов или неточности в обоснованиях. Допустимы одна описка и/или вычислительная ошибка, не влияющие на правильность дальнейшего хода решения. В результате этой ошибки или описки может быть получен неверный ответ.
2	Приведены все шаги решения 1) – 6). Ссылки на используемые при доказательстве положения теории а) – е) либо отсутствуют, либо приведены с ошибками, но сами эти положения теории использованы при решении. Допустимы описки и/или вычислительные ошибки, не влияющие на правильность дальнейшего хода решения. В результате этих ошибок или описок может быть получен неверный ответ.
1	Ход решения правильный, но решение не завершено: частично приведены шаги решения, которые отражены и ясно видны на чертеже (в соответствующих треугольниках обозначены углы, равные $90°$, отмечены равные углы и т.п.) или описаны словесно. Найдены некоторые числовые характеристики пирамиды $ACMT$. Приведенные в решении обоснования и вычисления не содержат грубых ошибок, влияющих на правильность хода решения.
0	Все случаи решения, которые не соответствуют указанным выше критериям выставления оценок в 1 – 4 балла.

С5. Найдите все значения a, при каждом из которых оба числа $3a\cdot 8^a$ и $6a\cdot 8^{a+1}-9a^2\cdot 64^a-53$ являются решениями неравенства $\log_{x-7,5}\left(\log_9\dfrac{x-20}{x-12}\right)\ge 0$.

Решение. Пусть $3a\cdot 8^a=t$. Тогда

$$6a\cdot 8^{a+1}-9a^2\cdot 64^a-53=16\cdot 3a\cdot 8^a-(3a\cdot 8^a)^2-53=16t-t^2-64+11=-(t-8)^2+11.$$

Решим теперь неравенство $\log_{x-7,5}\left(\log_9\dfrac{x-20}{x-12}\right)\ge 0$.

1. Если $7,5<x<8,5$, то данное неравенство равносильно системе неравенств:

$$\begin{cases}\log_9\dfrac{x-20}{x-12}\le 1,\\ \log_9\dfrac{x-20}{x-12}>0.\end{cases}$$

Решая эту систему, последовательно получаем:

$$\begin{cases}\log_9\dfrac{x-20}{x-12}\le 1,\\ \log_9\dfrac{x-20}{x-12}>0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\dfrac{x-20}{x-12}\le 9,\\ \dfrac{x-20}{x-12}>1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\dfrac{-8x+88}{x-12}\le 0,\\ \dfrac{-8}{x-12}>0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\dfrac{x-11}{x-12}\ge 0,\\ x-12<0\end{cases}\Leftrightarrow x\le 11.$$

Таким образом, все числа промежутка $(7,5;\ 8,5)$ являются решениями данного неравенства.

2. Если $x>8,5$, то данное неравенство равносильно неравенству $\log_9\dfrac{x-20}{x-12}\ge 1$, решая которое, получаем:

$$\log_9\frac{x-20}{x-12}\ge 1\Leftrightarrow\frac{x-20}{x-12}\ge 9\Leftrightarrow\frac{x-11}{x-12}\le 0\Leftrightarrow 11\le x<12.$$

Так как все числа промежутка $[11;\ 12)$ удовлетворяют условию $x>8,5$, они являются решениями данного неравенства.

Итак, множество $(7,5;8,5)\cup[11;12)$ — есть множество решений данного неравенства и, по условию, числа t и $-(t-8)^2+11$ должны принадлежать этому множеству.

Точка $(8;\ 11)$ — вершина параболы $z(t)=-(t-8)^2+11$, ветви которой направлены вниз. Таким образом, на промежутке $[11;\ 12)$ функция $z(t)=-(t-8)^2+11$ убывает и, если $t\in[11;12)$, то $z(t)\le z(11)=2$, т. е. в этом случае число $-(t-8)^2+11$ не является решением данного неравенства.

Если $t\in(7,5;8,5)$, то $z_1<z(t)\le 11$, где z_1 — меньшее из чисел $z(7,5)$ и $z(8,5)$. Поскольку $z(7,5)=z(8,5)=10,75$, в этом случае только число $z(8)=11$ является решением данного неравенства.

Итак, только при $t=8$ оба числа являются решениями данного неравенства.

Осталось решить относительно a уравнение $3a\cdot 8^a=8$.

При $a\le 0$ левая часть уравнения $3a\cdot 8^a=8$ неположительна, а правая положительна, значит, уравнение не имеет неположительных корней.

При $a>0$ уравнение $3a\cdot 8^a=8$ равносильно уравнению $8^a=\dfrac{8}{3a}$. Поскольку $y=8^a$ — возрастающая функция, а функция $y=\dfrac{8}{3a}$ убывает при $a>0$, уравнение $8^a=\dfrac{8}{3a}$ имеет на промежутке $(0;+\infty)$ не более одного корня. Подбором находим $a=\dfrac{2}{3}$.

Ответ: $\dfrac{2}{3}$.

Баллы	Критерии оценки выполнения задания С5
4	Приведена верная последовательность всех шагов решения: 1) решено данное неравенство; 2) найдена зависимость между выражениями $t=3a\cdot 8^a$ и $z(t)=6a\cdot 8^{a+1}-9a^2\cdot 64^a-53$; 3) найдено значение t, при котором числа $3a\cdot 8^a$ и $6a\cdot 8^{a+1}-9a^2\cdot 64^a-53$ являются решениями данного неравенства; 4) решено уравнение $3a\cdot 8^a=8$. Обоснованы все ключевые моменты решения: а) невозможность случая $t\in[11;12)$; б) существование и единственность числа $t=8$, удовлетворяющего условию задачи; в) существование и единственность корня уравнения $3a\cdot 8^a=8$. Получен верный ответ.
3	Приведена верная последовательность всех шагов решения. Обоснованы все ключевые моменты решения. Допущена одна описка или вычислительная ошибка, не повлиявшие на ход решения. В результате этой описки (ошибки) может быть получен неверный ответ.
2	Верно выполнены шаги 1) и 2), а шаги 3) и 4) выполнены неверно, в том числе – неверно обоснованы. Допустимы 1 – 2 вычислительные ошибки, в результате которых может быть получен неверный ответ.
1	Верно выполнен шаг 1) решения, а остальные – либо отсутствуют, либо выполнены неверно.
0	Все случаи решения, не соответствующие критериям выставления оценок в 1 – 4 балла.