

Решения заданий варианта ЕГЭ 2007 года

Часть 1

A1. Упростите выражение $b^{-3,4} \cdot 5b^{0,2}$.

1. $5b^{-3,6}$

2. $5^{0,2} \cdot b^{-3,2}$

3. $5b^{-3,2}$

4. $5^{0,2} \cdot b^{-3,6}$

Решение: $b^{-3,4} \cdot 5b^{0,2} = 5b^{-3,4+0,2} = 5b^{-3,2}$.

Правильный ответ: 3.

A2. Вычислите: $\frac{\sqrt[3]{189}}{3\sqrt[3]{7}}$.

1. 1

2. $\frac{1}{3}$

3. 9

4. 27

Решение: $\frac{\sqrt[3]{189}}{3\sqrt[3]{7}} = \frac{\sqrt[3]{7 \cdot 27}}{3\sqrt[3]{7}} = \frac{\sqrt[3]{7} \cdot \sqrt[3]{27}}{3\sqrt[3]{7}} = \frac{3\sqrt[3]{7}}{3\sqrt[3]{7}} = 1$.

Правильный ответ: 1.

A3. Найдите значение выражения $3 \cdot 2^{\log_2 5}$.

1. $\log_2 15$

2. 125

3. 30

4. 15

Решение: $3 \cdot 2^{\log_2 5} = 3 \cdot 5 = 15$.

Правильный ответ: 4.

A4. Функция задана графиком. На каком из указанных промежутков она возрастает?

1. $[1; 4]$

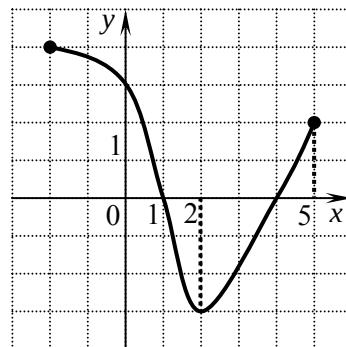
2. $[2; 5]$

3. $[0; 5]$

4. $[-2; 1]$

Решение: только на промежутке $[2; 5]$ для любых x_1 и x_2 из этого промежутка выполняется условие $x_2 > x_1 \Rightarrow y(x_2) > y(x_1)$.

Правильный ответ: 2.



A5. Найдите производную функции $y = 12x^3 - e^x$.

1. $y' = 15x^2 - x \cdot e^{x-1}$

2. $y' = 3x^2 - \frac{e^x}{x+1}$

3. $y' = 36x^2 - x \cdot e^{x-1}$

4. $y' = 36x^2 - e^x$

Решение: $y' = (12x^3)' - (e^x)' = 12 \cdot 3x^2 - e^x = 36x^2 - e^x$.

Правильный ответ: 4.

A6. Найдите множество значений функции $y = 3 \sin x$.

1. $[-3; 3]$ 2. $[0; 3]$ 3. $[-1; 1]$ 4. $(-\infty; +\infty)$

Решение: $-1 \leq \sin x \leq 1 \Leftrightarrow -3 \leq 3 \sin x \leq 3$.

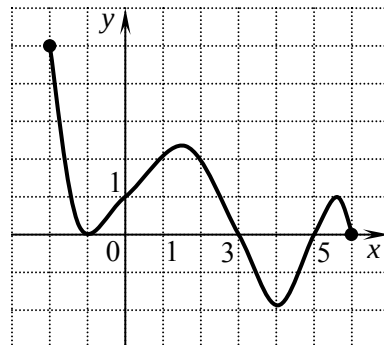
Правильный ответ: 1.

A7. Функция задана графиком. Укажите промежуток, на котором она принимает только отрицательные значения.

1. $(3; 6)$ 2. $(3; 5)$ 3. $(-2; -1)$ 4. $(-2; 0)$

Решение: только на промежутке $(3; 5)$ все точки графика расположены ниже оси абсцисс.

Правильный ответ: 2.

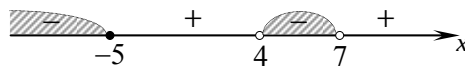


A8. Решите неравенство $\frac{5+x}{(x-7)(x-4)} \leq 0$.

1. $(-\infty; -5]$ 2. $[-5; 4) \cup (7; +\infty)$ 3. $(-\infty; 7)$ 4. $(-\infty; -5] \cup (4; 7)$

Решение. Решим данное неравенство методом интервалов (см. рис.):

$$\frac{5+x}{(x-7)(x-4)} \leq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 4 < x < 7, \\ x \leq -5. \end{cases}$$



Правильный ответ: 4.

A9. Решите уравнение $\sin x - \frac{1}{2} = 0$.

1. $\pm \frac{\pi}{6} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$ 2. $\frac{\pi}{3} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$
3. $(-1)^k \frac{\pi}{6} + \pi k, k \in \mathbb{Z}$ 4. $(-1)^k \frac{\pi}{6} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$

Решение: $\sin x - \frac{1}{2} = 0 \Leftrightarrow \sin x = \frac{1}{2} \Leftrightarrow x = (-1)^k \frac{\pi}{6} + \pi k, k \in \mathbb{Z}$.

Правильный ответ: 3.

A10. Решите неравенство $5^{4x+6} \leq 125^x$.

1. $(-\infty; -6]$ 2. $(-\infty; -2]$ 3. $[-2; +\infty)$ 4. $[-6; +\infty)$

Решение: $5^{4x+6} \leq 125^x \Leftrightarrow 5^{4x+6} \leq 5^{3x} \Leftrightarrow 4x+6 \leq 3x \Leftrightarrow x \leq -6$.

Правильный ответ: 1.

В1. Найдите значение выражения $3\sin^2 \alpha - 5\cos^2 \alpha$, если $\cos \alpha = -\frac{1}{2}$.

Решение: $3\sin^2 \alpha - 5\cos^2 \alpha = 3(1 - \cos^2 \alpha) - 5\cos^2 \alpha = 3 - 8\cos^2 \alpha = 3 - 8 \cdot \frac{1}{4} = 1$.

Ответ: 1.

В2. Решите уравнение $3^{x+2} + 6 \cdot 3^x = 5$.

Решение:

$$3^{x+2} + 6 \cdot 3^x = 5 \Leftrightarrow 3^x(3^2 + 6) = 5 \Leftrightarrow 3^x = \frac{1}{3} \Leftrightarrow 3^x = 3^{-1} \Leftrightarrow x = -1.$$

Ответ: -1.

В3. Решите уравнение $\sqrt{2x^2 - x - 6} = -x$.

Решение:

$$\sqrt{2x^2 - x - 6} = -x \Leftrightarrow \begin{cases} 2x^2 - x - 6 = x^2, \\ -x \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - x - 6 = 0, \\ x \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = -2.$$

Ответ: -2.

ЧАСТЬ 2

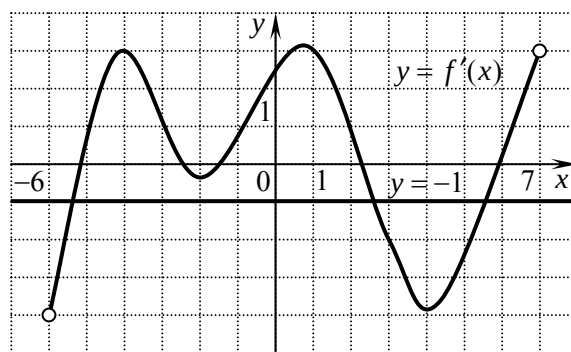
В4. Найдите значение выражения $\sin y$, если известно, что $\begin{cases} x - y = \frac{\pi}{2}, \\ 7 \cos x - 3 \sin y = 9. \end{cases}$

Решение:

$$\begin{cases} x - y = \frac{\pi}{2}, \\ 7 \cos x - 3 \sin y = 9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = y + \frac{\pi}{2}, \\ 7 \cos\left(\frac{\pi}{2} + y\right) - 3 \sin y = 9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = y + \frac{\pi}{2}, \\ -7 \sin y - 3 \sin y = 9 \end{cases} \Rightarrow \sin y = -\frac{9}{10}.$$

Ответ: -0,9.

В5. Функция $y = f(x)$ определена на промежутке $(-6; 7)$. На рисунке изображен график производной этой функции. К графику функции провели все касательные, параллельные прямой $y = 3 - x$ (или совпадающие с ней). Укажите количество точек графика функции, в которых проведены эти касательные.



Решение. Угловой коэффициент всех касательных, параллельных прямой $y = 3 - x$ (или совпадающих с ней) равен -1 . С другой стороны, угловой коэффициент касательной к графику функции равен значению производной этой функции в точке касания. Нетрудно видеть, что производная, график которой изображен на рисунке, принимает значение -1 ровно в трех точках.

Ответ: 3.

В6. Найдите значение выражения $\sqrt[4]{(37 - 20\sqrt{3})^2} + 2\sqrt{3}$.

Решение:

а) преобразуем выражение $\sqrt[4]{(37 - 20\sqrt{3})^2}$:

$$\begin{aligned}\sqrt[4]{(37 - 20\sqrt{3})^2} &= \sqrt[4]{(25 - 2 \cdot 5 \cdot 2\sqrt{3} + 12)^2} = \sqrt[4]{(5^2 - 2 \cdot 5 \cdot 2\sqrt{3} + (2\sqrt{3})^2)^2} = \\ &= \sqrt[4]{(5 - 2\sqrt{3})^4} = |5 - 2\sqrt{3}|;\end{aligned}$$

б) раскроем модуль: $5 > 2\sqrt{3} \Rightarrow |5 - 2\sqrt{3}| = 5 - 2\sqrt{3}$;

в) выполним сложение: $5 - 2\sqrt{3} + 2\sqrt{3} = 5$.

Ответ: 5.

В7. Решите уравнение $\log_7(3x+5) + \sqrt[4]{\log_7^4(2x+5)} = 0$. (Если уравнение имеет более одного корня, то в бланке ответов запишите произведение всех его корней.)

Решение. Упростим левую часть уравнения:

$$\log_7(3x+5) + \sqrt[4]{\log_7^4(2x+5)} = 0 \Leftrightarrow \log_7(3x+5) + |\log_7(2x+5)| = 0.$$

Последнее уравнение равносильно совокупности двух систем:

$$\begin{cases} \log_7(2x+5) \geq 0, \\ \log_7(3x+5) + \log_7(2x+5) = 0 \end{cases} \quad \text{и} \quad \begin{cases} \log_7(2x+5) < 0, \\ \log_7(3x+5) - \log_7(2x+5) = 0. \end{cases}$$

Решим первую систему:

$$\begin{aligned}\begin{cases} \log_7(2x+5) \geq 0, \\ \log_7(3x+5) + \log_7(2x+5) = 0 \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} 2x+5 \geq 1, \\ \log_7((3x+5)(2x+5)) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -2, \\ 6x^2 + 25x + 24 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = -\frac{3}{2}\end{aligned}$$

Решим вторую систему:

$$\begin{aligned}\begin{cases} \log_7(2x+5) < 0, \\ \log_7(3x+5) - \log_7(2x+5) = 0 \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} 0 < 2x+5 < 1, \\ \log_7(3x+5) = \log_7(2x+5) \end{cases} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} -2,5 < x < -2, \\ 3x+5 = 2x+5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -2,5 < x < -2, \\ x = 0. \end{cases}\end{aligned}$$

Последняя система не имеет решений.

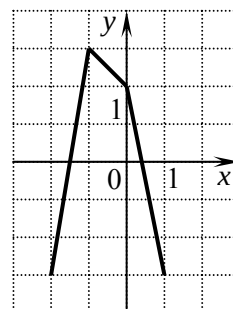
Ответ: $-1,5$.

В8. Функция $y = f(x)$ определена на всей числовой прямой и является периодической с периодом 3. На рисунке изображен график этой функции при $-2 \leq x \leq 1$. Найдите значение выражения $f(-5) - f(-1) + f(12)$.

Решение. Обозначим период данной функции через T . Согласно условию $T = 3$, откуда

$$\begin{aligned}f(-5) - f(-1) + f(12) &= f(-5 + T) - f(-1) + f(12 - 4T) = \\ &= f(-2) - f(-1) + f(0) = -3 - 3 + 2 = -4.\end{aligned}$$

Ответ: -4 .



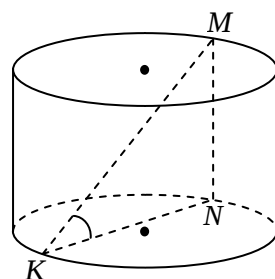
В9. Две бригады работая вместе, ремонтировали дорогу в течение 6 дней, а затем одна вторая бригада закончила ремонт еще за 10 дней. За сколько дней могла бы отремонтировать дорогу одна первая бригада, если она может выполнить эту работу на 6 дней быстрее, чем одна вторая бригада?

Решение. Пусть x — количество дней, необходимое первой бригаде для ремонта дороги, тогда, согласно условию, второй бригаде требуется на ремонт $x + 6$ дней. Примем за 1 объем всей работы по ремонту дороги. Тогда первая бригада выполняет за день $\frac{1}{x}$ часть всей работы, а вторая — $\frac{1}{x+6}$ часть всей работы. Поскольку первая бригада работала 6 дней, а вторая — 16 дней и за это время они выполнили всю работу, получаем уравнение $\frac{6}{x} + \frac{16}{x+6} = 1$, где по смыслу задачи $x > 0$. Далее имеем:

$$\begin{cases} \frac{6}{x} + \frac{16}{x+6} = 1, \\ x > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 6x + 36 + 16x = x^2 + 6x, \\ x > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - 16x - 36 = 0, \\ x > 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = 18.$$

Ответ: 18.

В10. Точки K и M лежат на окружностях двух оснований цилиндра. Синус угла наклона прямой KM к плоскости основания цилиндра равен 0,6, $KM = 10$, объем цилиндра равен 150π . Найдите площадь осевого сечения цилиндра.



Решение. Проведем в данном цилиндре образующую MN (см. рис.). Так как образующая цилиндра перпендикулярна плоскости основания, прямая KN является проекцией прямой KM на плоскость основания цилиндра. Следовательно, угол MKN является углом наклона прямой KM к плоскости основания цилиндра и его синус равен 0,6. Обозначим через α величину угла MKN , через l длину образующей цилиндра, через r радиус его основания, через V объем и через S площадь осевого сечения. Тогда имеем:

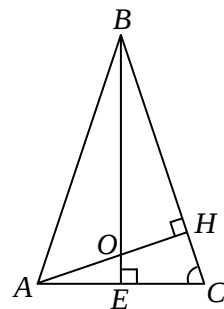
$$1. l = KM \sin \alpha = 10 \cdot 0,6 = 6.$$

$$2. \begin{cases} V = \pi r^2 l, \\ V = 150\pi \end{cases} \Rightarrow \pi r^2 l = 150\pi, \text{ откуда, учитывая } l = 6, \text{ получаем } r^2 = 25 \Leftrightarrow r = 5.$$

$$3. S = 2rl = 60.$$

Ответ: 60.

В11. Боковая сторона равнобедренного треугольника ABC равна 15, а его площадь равна 67,5. К основанию AC и стороне BC проведены высоты BE и AH , пересекающиеся в точке O . Найдите площадь треугольника BOH .



Решение. Пусть S — площадь треугольника ABC . Тогда имеем:

$$1. S = \frac{1}{2} BC \cdot AH, \text{ откуда } AH = \frac{2S}{BC} = \frac{2 \cdot 67,5}{15} = 9.$$

$$2. AH \perp BH \Rightarrow BH = \sqrt{AB^2 - AH^2} = \sqrt{225 - 81} = 12.$$

$$3. HC = BC - BH = 3.$$

$$4. S_{\triangle ACH} = \frac{1}{2} HC \cdot AH = \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 9 = \frac{27}{2}.$$

$$5. \angle AOE = \angle BOH \Rightarrow \angle CAH = \angle OBH \Rightarrow \triangle BOH \sim \triangle ACH \Rightarrow \frac{S_{BOH}}{S_{ACH}} = \frac{BH^2}{AH^2},$$

$$\text{откуда } S_{BOH} = \frac{27 \cdot 144}{2 \cdot 81} = 24.$$

Ответ: 24.

С1. Найдите точки минимума функции $f(x) = 3x^4 + 3x^3 - 72x^2 + 2^{-\log_1(x^3+8)^{\frac{1}{2}}}$.

Решение. Область определения данной функции совпадает с множеством решений неравенства $x^3 + 8 > 0$. Поскольку $x^3 + 8 > 0 \Leftrightarrow x > -2$, получаем $D(f) = (-2; +\infty)$.

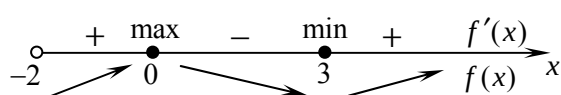
На множестве $(-2; +\infty)$ имеем:

$$2^{-\log_1(x^3+8)^{\frac{1}{2}}} = 2^{\log_2(x^3+8)} = x^3 + 8.$$

Таким образом, требуется найти точки минимума функции $f(x) = 3x^4 + 4x^3 - 72x^2 + 8$ на множестве $(-2; +\infty)$.

Найдем производную: $f'(x) = 12x^3 + 12x^2 - 144x$.

Решим уравнение $f'(x) = 0$ на луче $(-2; +\infty)$:

$$\begin{cases} 12x(x^2 + x - 12) = 0, \\ x > -2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0, \\ x = 3. \end{cases}$$


Таким образом, $x = 3$ — единственная точка минимума данной функции.

Ответ: $x = 3$.

Баллы	Критерии оценки выполнения задания С1
2	Приведена верная последовательность всех шагов решения: 1) нахождение области определения данной функции; 2) преобразование формулы, задающей функцию; 3) нахождение производной функции; 4) исследование функции с помощью производной. Все тождественные преобразования и вычисления выполнены верно. Получен верный ответ.
1	Приведена верная последовательность всех шагов решения. Допущена одна описка или вычислительная ошибка, не повлиявшие на ход решения. В результате этой описки (ошибки) может быть получен неверный ответ.
0	Все случаи решения, не соответствующие критериям выставления оценок в 1 и 2 балла.

С2. Решите уравнение $x^2 + x = \frac{1}{2}(6 - x) + \sqrt{2x^2 + 3x + 2}$.

Решение. Умножим обе части уравнения на 2 и перегруппируем слагаемые:

$$x^2 + x = \frac{1}{2}(6 - x) + \sqrt{2x^2 + 3x + 2} \Leftrightarrow 2x^2 + 3x - 6 = 2\sqrt{2x^2 + 3x + 2}.$$

Пусть $\sqrt{2x^2 + 3x + 2} = t$, где $t \geq 0$. Тогда $2x^2 + 3x = t^2 - 2$ и данное уравнение принимает вид $t^2 - 2t - 8 = 0$, откуда, учитывая условие $t \geq 0$, получаем $t = 4$.

Возвращаясь к переменной x , находим

$$\sqrt{2x^2 + 3x + 2} = 4 \Leftrightarrow 2x^2 + 3x + 2 = 16 \Leftrightarrow 2x^2 + 3x - 18 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{-3 \pm 11}{4} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -3,5, \\ x = 2. \end{cases}$$

Ответ: $\{-3,5; 2\}$.

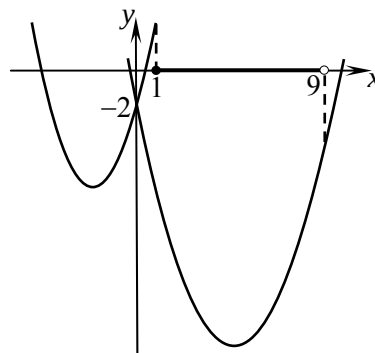
Баллы	Критерии оценки выполнения задания С2
2	Приведена верная последовательность всех шагов решения: 1) замена переменной, решение полученного в результате замены уравнения; 2) решение уравнения относительно исходной переменной, отбор корней. Все преобразования и вычисления выполнены верно. Получен верный ответ.
1	Приведена верная последовательность всех шагов решения. Допущена одна описка или вычислительная ошибка, не повлиявшие на ход решения. В результате этой описки (ошибки) может быть получен неверный ответ.
0	Все случаи решения, не соответствующие критериям выставления оценок в 1 и 2 балла.

ЧАСТЬ 3

С3. Найдите все значения a , для которых при каждом x из промежутка $(-3; -1]$ значение выражения $x^4 - 8x^2 - 2$ не равно значению ax^2 .

Решение. Требуется найти все значения a , для которых уравнение $x^4 - 8x^2 - 2 = ax^2$ или равносильное ему уравнение $x^4 - (a+8)x^2 - 2 = 0$ не имеет решений на промежутке $(-3; -1]$.

Функция $f(x) = x^4 - (a+8)x^2 - 2$ является четной, так как $f(-x) = f(x)$ для любого $x \in \mathbb{R}$. Следовательно, эта функция не имеет корней на промежутке $(-3; -1]$ тогда и только тогда, когда она не имеет корней на промежутке $[1; 3)$. С другой стороны, функция $f(x) = x^4 - (a+8)x^2 - 2$ не имеет корней на множестве $(-3; -1] \cup [1; 3)$ тогда и только тогда, когда функция $g(t) = t^2 - (a+8)t - 2$ не имеет корней на промежутке $[1; 9)$. Поскольку $g(0) = -2$ при любом значении параметра a , это условие выполняется в одном из двух случаев: либо $g(1) > 0$, либо $g(9) \leq 0$ (см. рис.).



Учитывая, что $g(1) = -a - 9$, $g(9) = -9a - 7$, получаем:

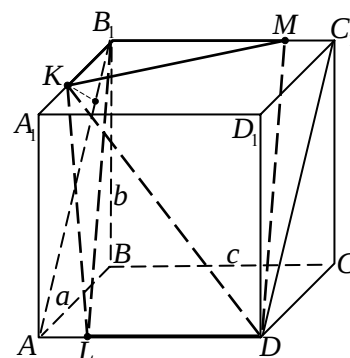
$$\begin{cases} -a - 9 > 0, \\ -9a - 7 \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a < -9, \\ a \geq \frac{7}{9}. \end{cases}$$

Ответ: $a \in (-\infty; -9) \cup \left[\frac{7}{9}; +\infty\right)$.

Баллы	Критерии оценки выполнения задания С3
	Приведена верная последовательность всех шагов решения: 1) получена формула, задающая функцию $f(x)$, которая не должна иметь кор-

4	ней на промежутке $[1; 3)$; 2) обоснована четность составленной функции; 3) составлена вспомогательная функция $g(t)$; 4) установлен промежуток, на котором функция $g(t)$ не должна иметь корней; 5) найдены значения a , при которых функция $g(t)$ не имеет корней на промежутке $[1; 9)$. Все преобразования и вычисления выполнены верно. Получен верный ответ.
3	Приведена верная последовательность всех шагов решения. Отсутствует или не обоснован шаг 2) или не обоснован шаг 4). Допущена одна описка или вычислительная ошибка, не повлиявшие на ход решения. В результате этой описки (ошибки) может быть получен неверный ответ.
2	Верно выполнены шаги 1), 3), 4); отсутствует шаг 2); отсутствует обоснование шага 4); шаг 5) либо не доведен до конца, либо выполнен неверно. Допустима описка или вычислительная ошибка. В результате может быть получен неверный ответ.
1	Верно выполнены шаги 1) и 3), а остальные – либо отсутствуют, либо выполнены неверно.
0	Все случаи решения, которые не соответствуют указанным выше критериям выставления оценок в 1 – 4 балла.

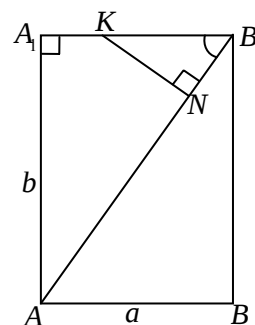
С4. В прямоугольном параллелепипеде $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ с боковыми ребрами AA_1 , BB_1 , CC_1 , DD_1 на сторонах AD , $A_1 B_1$, $B_1 C_1$ его оснований лежат соответственно точки L , K , M так, что $\frac{AL}{LD} = \frac{2}{5}$, $\frac{A_1 K}{KB_1} = \frac{2}{3}$, $\frac{B_1 M}{MC_1} = \frac{5}{2}$. Во сколько раз объем параллелепипеда больше объема пирамиды с вершиной K и основанием $LDMB_1$?



Решение. Обозначим через a , b и c длины ребер BA , BB_1 и BC параллелепипеда $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ соответственно (см. рис.). Тогда объем параллелепипеда $V = abc$. Стороны LD и MB_1 основания $LDMB_1$ пирамиды $KLDMB_1$ лежат на параллельных прямых AD и $B_1 C_1$. Кроме того, по условию, $LD = MB_1 = \frac{5}{7}c$. Следовательно, $LDMB_1$ – параллелограмм. Так как $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ – прямоугольный параллелепипед, прямая LD перпендикулярна плоскости, в которой лежит прямая AB_1 , откуда, согласно определению перпендикулярности прямой и плоскости, $AB_1 \perp LD$.

Тогда площадь основания пирамиды $S = LD \cdot AB_1$. Отрезок AB_1 — диагональ прямоугольника $AA_1 B_1 B$ со сторонами a и b (см. рис.), следовательно, $AB_1 = \sqrt{a^2 + b^2}$ и $S = \frac{5}{7}c\sqrt{a^2 + b^2}$.

Опустим перпендикуляр KN из точки K на прямую AB_1 (см. рис.). Прямая AD перпендикулярна плоскости $AA_1 B_1 B$, в которой лежит прямая KN , следовательно, $KN \perp AD$. Таким образом, прямая KN перпендикулярна двум пересекающимся прямым AB_1 и AD плоскости $AA_1 D$, следовательно, согласно признаку перпендикулярности прямой и плоскости, она перпендикулярна самой этой плоскости. Значит отрезок KN — высота



пирамиды $KLDMB_1$. Прямоугольные треугольники KNB_1 и AA_1B_1 подобны, так как имеют общий острый угол B_1 , следовательно, $\frac{KN}{AA} = \frac{KB}{AB}$, откуда

$$KN = \frac{b \cdot \frac{3}{5}a}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \frac{3ab}{5\sqrt{a^2 + b^2}}.$$

Находим объем V_1 пирамиды $KLDMB_1$:

$$V_1 = \frac{1}{3} S \cdot KN = \frac{1}{3} \cdot \frac{5}{7} c \sqrt{a^2 + b^2} \cdot \frac{3ab}{5\sqrt{a^2 + b^2}} = \frac{1}{7} abc = \frac{1}{7} V.$$

Ответ: В семь раз.

Баллы	Критерии оценки выполнения задания С4
4	Приведена верная последовательность всех шагов решения: 1) обоснован тот факт, что основание пирамиды $KLDMB_1$ – параллелограмм; 2) обоснован тот факт, что отрезок AB_1 – высота параллелограмма $LDMB_1$; 3) обоснован тот факт, что отрезок KN – высота пирамиды $KLDMB_1$; 4) доказано подобие треугольников KNB_1 и AA_1B_1; 5) вычислена площадь параллелограмма $LDMB_1$; 6) вычислен объем пирамиды $KLDMB_1$. Верно приведены ссылки на используемые при доказательстве положения теории: а) определение прямой, перпендикулярной плоскости; б) признак перпендикулярности прямой и плоскости; в) признак подобия прямоугольных треугольников. Все преобразования и вычисления выполнены верно. Получен верный ответ.
3	Приведены все шаги решения 1) – 6). Приведены ссылки на используемые при доказательстве положения теории а) – в). Допустимы отсутствие обоснований некоторых ключевых моментов или неточности в обоснованиях. Допустимы одна описка и/или вычислительная ошибка, не влияющие на правильность дальнейшего хода решения. В результате этой ошибки или описки может быть получен неверный ответ.
2	Приведены все шаги решения 1) – 6). Ссылки на используемые при доказательстве положения теории а) – в) либо отсутствуют, либо приведены с ошибками, но сами эти положения теории использованы при решении. Допустимы описки и/или вычислительные ошибки, не влияющие на правильность дальнейшего хода решения. В результате этих ошибок или описок может быть получен неверный ответ.
1	Ход решения правильный, но решение не завершено: частично приведены шаги решения. Найдены некоторые числовые характеристики пирамиды $KLDMB_1$. Приведенные в решении обоснования и вычисления не содержат грубых ошибок, влияющих на правильность хода решения.

С5. Докажите, что система уравнений:

$$\begin{cases} 15x^3 + 36x^2 + 22x + 4 = 0, \\ 9\sin\frac{\pi}{x} + \cos((5x+1)y) = y\left(y + \frac{2}{x} - 1\right) + \sqrt{\frac{4}{x} + 16 + 5x(1-5x)} \cdot \sin y \end{cases}$$

не имеет решений.

Решение. Область допустимых значений переменной x совпадает с множеством решений неравенства $\frac{4}{x} + 16 + 5x(1-5x) \geq 0$. Решим это неравенство методом интервалов:

$$\frac{4}{x} + 16 + 5x(1-5x) \geq 0 \Leftrightarrow \frac{-25x^3 + 5x^2 + 16x + 4}{x} \geq 0.$$

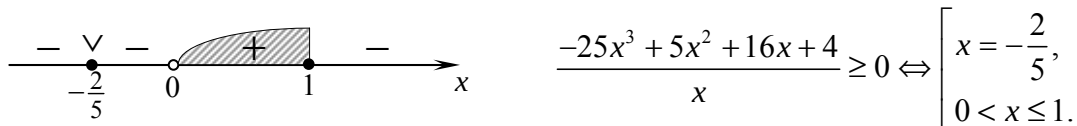
Подбором находим один из корней числителя $x=1$ и делим многочлен $-25x^3 + 5x^2 + 16x + 4$ на двучлен $x-1$ с помощью схемы Горнера:¹⁾

	-25	5	16	4
1	-25	-20	-4	0

Решая получившееся квадратное уравнение, находим:

$$-25x^2 - 20x - 4 = 0 \Leftrightarrow (5x+2)^2 = 0 \Leftrightarrow x = -\frac{2}{5}.$$

Далее имеем (см. рис.):



Ясно, что первое уравнение системы не имеет положительных корней, так как $15x^3 + 36x^2 + 22x + 4 > 0$ при $x > 0$. Значит, ни одно из чисел промежутка $(0; 1]$ не удовлетворяет первому уравнению. Подставляя в него $x = -\frac{2}{5}$, получаем верное равенство $15 \cdot \left(-\frac{2}{5}\right)^3 + 36 \cdot \left(-\frac{2}{5}\right)^2 + 22 \cdot \left(-\frac{2}{5}\right) + 4 = 0$. Таким образом, $-\frac{2}{5}$ — единственное значение переменной x , удовлетворяющее первому уравнению системы.

Подставив теперь $x = -\frac{2}{5}$ во второе уравнение системы, получаем:

$$9\sin\left(-\frac{5\pi}{2}\right) + \cos(-y) = y(y-6) \Leftrightarrow \cos y = (y-3)^2. \quad (*)$$

Если $y \in \left(\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}\right)$, то уравнение $(*)$ не имеет решений, так как на этом промежутке $\cos y < 0$, а $(y-3)^2 \geq 0$.

¹⁾ Можно выполнить деление, пользуясь алгоритмом деления «уголком».

Функция $g(y) = (y-3)^2$ убывает на промежутке $(-\infty; 3]$ и возрастает на промежутке $[3; +\infty)$. Следовательно, если $y \leq \frac{\pi}{2}$, то $g(y) \geq g\left(\frac{\pi}{2}\right) > g(2) = 1$, а если $y \geq \frac{3\pi}{2}$, то $g(y) \geq g\left(\frac{3\pi}{2}\right) > g(4) = 1$. Таким образом, $(y-3)^2 > 1$ на множестве $(-\infty; \frac{\pi}{2}] \cup [\frac{3\pi}{2}; +\infty)$. Так как $\cos y \leq 1$ при любом значении y , то на множестве $(-\infty; \frac{\pi}{2}] \cup [\frac{3\pi}{2}; +\infty)$ уравнение (*) также не имеет решений.

Итак, данная система уравнений не имеет решений, что и требовалось доказать.

Баллы	Критерии оценки выполнения задания С5
4	Приведена верная последовательность всех шагов решения: 1) найдена область допустимых значений (ОДЗ) переменной x; 2) доказано, что только число $-\frac{2}{5}$ из ОДЗ удовлетворяет первому уравнению системы; 3) доказано, что при $x = -\frac{2}{5}$ второе уравнение системы не имеет решений; Обоснованы все ключевые моменты решения: а) отсутствие решений первого уравнения на множестве $(0; 1]$; б) отсутствие решений второго уравнения на множестве $\left(\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}\right)$; в) отсутствие решений второго уравнения на множестве $(-\infty; \frac{\pi}{2}] \cup [\frac{3\pi}{2}; +\infty)$; Все преобразования и вычисления выполнены верно. Сделан правильный вывод.
3	Приведена верная последовательность всех шагов решения. Обоснованы все ключевые моменты решения. Допущена одна описка или вычислительная ошибка, не повлиявшие на ход решения.
2	Верно выполнены шаги 1) и 2), а шаг 3) выполнен неверно, в том числе – неверно обоснован. Допустимы 1 – 2 вычислительные ошибки.
1	Верно выполнен шаг 1) решения, шаг 2) выполнен частично, а остальные шаги либо отсутствуют, либо выполнены неверно.
0	Все случаи решения, которые не соответствуют указанным выше критериям выставления оценок в 1 – 4 балла.