

Санкт–Петербургский государственный университет  
физический факультет  
2003–2004 учебный год, январь

## РЕГИОНАЛЬНАЯ ОЛИМПИАДА ПО МАТЕМАТИКЕ

### 11 класс

1. Уравнение  $x^4 + ax^3 + bx + c = 0$  имеет четыре различных вещественных корня. Докажите, что  $ab < 0$ .
2. Докажите, что целая часть корня четвертой степени из произведения восьми последовательных натуральных чисел равна  $n^2 + 7n + 6$ , где  $n$  — наименьший из восьми сомножителей.
3. Окружность длины  $L$  катится без проскальзывания по окружности длины  $L\sqrt{2}$ . В начальный момент времени точка соприкосновения окружностей отмечена липкой красной краской. При качении покрашенные точки как подвижной, так и неподвижной окружностей вновь окрашивают точки, с которыми соприкасаются. Сколько различных точек неподвижной окружности будет окрашено к тому моменту, когда подвижная окружность сделает 2004 оборота вокруг неподвижной?
4. Пусть  $R_1$  и  $R_2$  — радиусы двух сфер, касающихся друг друга и плоскости. Докажите, что радиус  $r$  наибольшей сферы, проходящей в зазор между двумя заданными сферами и плоскостью, определяется из соотношения  $\frac{1}{\sqrt{r}} = \frac{1}{\sqrt{R_1}} + \frac{1}{\sqrt{R_2}}$ .
5. Докажите, что любой компании число тех, кто знаком с нечетным числом членов компании, четно.