Санкт-Петербургский государственный университет
физический факультет
2004–2005 учебный год, февраль

РЕГИОНАЛЬНАЯ ОЛИМПИАДА ПО МАТЕМАТИКЕ

11 класс

Вариант 1

1. Сравните числа $2^{\sqrt{5}}$ и $3^{\sqrt{3}}$.
2. Решите неравенство $\sqrt{x^3 - x^2 - x + 1} \geq 1 - x$.
3. Решите неравенство $\log_4^2 \left(\frac{x}{2}\right)^4 \leq \log_2^3 \left(-\frac{2}{x}\right)$.
4. Решите систему уравнений $\begin{cases} (x-y)(x^2+y^2) = x^4 - 1, \\ (x+y)(x^4+y^4) = x^4 + 1. \end{cases}$
5. Решите уравнение $\sin x - 2\cos x = 3\cos^2 x - 2\sin 2x - 5$.
6. Изобразите множество точек плоскости *Oxy*, для которых верно равенство $y = \frac{|y+x| + |y-x|}{2}$.
7. Определите количество решений уравнения $\sin^{2004} x + 2004 = \mathrm{ctg}^{2005} x$ на отрезке $[0;\ 2005\pi]$.
8. Найдите те первообразные функции $f(x) = 3x^2 - 2x + 3$, графики которых имеют с графиком функции $f(x)$ ровно две общие точки.
9. Решите уравнение $(x-y)^2 + (e^x - y)^2 = \frac{1}{2}$.
10. В основании треугольной пирамиды *SABC* лежит равносторонний треугольник *ABC* со стороной *a*. Боковые грани пирамиды составляют с плоскостью *ABC* угол α. Найдите радиус вписанного в пирамиду шара.

Санкт-Петербургский государственный университет
физический факультет
2004–2005 учебный год, февраль

РЕГИОНАЛЬНАЯ ОЛИМПИАДА ПО МАТЕМАТИКЕ

11 класс

Вариант 2

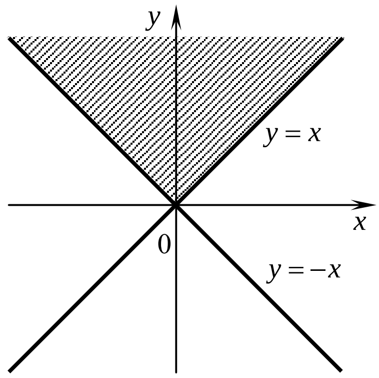
1. Сравните числа $2^{\sqrt{10}}$ и $3^{\sqrt{3}}$.
2. Решите неравенство $\sqrt{1+x-x^2-x^3} \geq -x-1$.
3. Решите неравенство $\log_9^2\left(\dfrac{3}{x}\right)^4 \leq \log_3^3\left(-\dfrac{x}{3}\right)$.
4. Решите систему уравнений $\begin{cases}(x+y)(x^2+y^2)=1-y^4,\\ (x-y)(x^4+y^4)=1+y^4.\end{cases}$
5. Решите уравнение $3\sin x+\cos x+5=8\sin^2 x+3\sin 2x$.
6. Изобразите множество точек плоскости *Oxy*, для которых верно равенство $x=\dfrac{|y+x|+|y-x|}{2}$.
7. Определите количество решений уравнения $\cos^{2004} x+2005=\operatorname{tg}^{2005} x$ на отрезке $[-2004\pi;\,0]$.
8. Найдите те первообразные функции $f(x)=6x^2+2x-2$, графики которых имеют с графиком функции $f(x)$ ровно две общие точки.
9. Решите уравнение $(y-x)^2+(y-\ln x)^2=\dfrac{1}{2}$.
10. В основании треугольной пирамиды *SABC* лежит равносторонний треугольник *ABC* со стороной *a*. Высоты всех боковых граней, проведенные из вершины пирамиды, равны *h*. Найдите радиус вписанного в пирамиду шара.

Санкт-Петербургский государственный университет
физический факультет
2004–2005 учебный год, февраль

РЕГИОНАЛЬНАЯ ОЛИМПИАДА ПО МАТЕМАТИКЕ

11 класс

Ответы к варианту 1



1. $2^{\sqrt{5}} < 3^{\sqrt{3}}$. **2.** $[0;\,+\infty)$. **3.** $[-0{,}125;\,0)\cup\{-2\}$. **4.** $\{(0;\,1);\,(2;\,-1)\}$.

5. $\left\{\operatorname{arctg}2+(-1)^k\arcsin\left(-\frac{2}{\sqrt{5}}\right)+\pi k : k\in\mathbb{Z}\right\}$. **6.** см. рисунок.

7. 2005. **8.** $F(x)=x^3-x^2+3x+1$ и $F(x)=x^3-x^2+3x+\frac{31}{27}$.

9. $\{(0;\,0{,}5)\}$. **10.** $\frac{a\sqrt{3}}{6}\cdot\frac{\sin\alpha}{1+\cos\alpha}$ или $\frac{a\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{\sin\alpha}{3+\cos\alpha}$.

Санкт-Петербургский государственный университет
физический факультет
2004–2005 учебный год, февраль

РЕГИОНАЛЬНАЯ ОЛИМПИАДА ПО МАТЕМАТИКЕ

11 класс

Ответы к варианту 2

1. $2^{\sqrt{10}} < 3^{\sqrt{3}}$. **2.** $(-\infty; 1]$. **3.** $(-\infty; -243] \cup \{-3\}$. **4.** $\{(1; 0); (-1; -2)\}$.

5. $\left\{(-1)^k \arcsin\dfrac{3}{\sqrt{10}} - \operatorname{arctg}\dfrac{1}{3} + \pi k;\ (-1)^k \arcsin\left(-\dfrac{2}{\sqrt{10}}\right) - \operatorname{arctg}\dfrac{1}{3} + \pi k : k \in \mathbb{Z}\right\}$. **6.** см. рисунок. **7.** 2004.

8. $F(x) = 2x^3 + x^2 - 2x + 10$ и $F(x) = 2x^3 + x^2 - 2x - \dfrac{73}{27}$. **9.** $\{(1; 0,5)\}$.

10. $\dfrac{a\sqrt{3}}{6} \cdot \dfrac{\sqrt{12h^2 - a^2}}{a + 2\sqrt{3}h}$ или $\dfrac{a\sqrt{3}}{2} \cdot \dfrac{\sqrt{4h^2 - 3a^2}}{a\sqrt{3} + 6h}$.