

Санкт-Петербургский государственный университет
физический факультет
2004–2005 учебный год, март

РЕГИОНАЛЬНАЯ ОЛИМПИАДА ПО МАТЕМАТИКЕ

11 класс

Вариант 1

1. Сравните числа $\sin 10^\circ \cdot \cos 20^\circ$ и $\sin 40^\circ$.
2. Решите уравнение $\sqrt{x^2 + x} - \sqrt{x^2 - 2x} = \sqrt{-3x}$.
3. Решите неравенство $\sqrt{x^6 + 2x^3 + 1} \leq x + 1$.
4. Изобразите множество точек плоскости Oxy , для которых верно равенство $\log_2(\sin x \cdot \sin y) = \log_2 |\sin x| + \log_2 |\sin y|$.
5. Решите систему уравнений
$$\begin{cases} x(xy + 6) = y^3, \\ y(xy - 24) = x^3. \end{cases}$$
6. Определите, при каких значениях параметра a уравнение $27^x + (a - 2) \cdot 9^x - a \cdot 3^x + 2a - a^2 = 0$ имеет единственное решение.
7. Определите стоимость набора из 11 кг апельсинов, 18 кг яблок и 4 кг груш, если 3 кг апельсинов, 5 кг яблок и 2 кг груш стоят вместе 290 рублей, а 1 кг апельсинов, 2 кг яблок и 4 кг груш стоят 270 рублей.
8. Из вершины прямого угла прямоугольного треугольника провели высоту. В полученные тем самым треугольники вписали окружности радиусов 3 и 4. Найдите радиус окружности, вписанной в исходный треугольник.
9. Куб с длиной ребра 2 повернули вокруг высоты, проходящей через центр его основания, на угол 45° . Докажите, что объем общей части исходного и полученного кубов не меньше чем 4.
10. Определите, при каком значении параметра a площадь фигуры, ограниченной линиями $y = x^2 + x + \cos^2 x$, $y = x - \sin^2 x$, $x = a$, $x = a + 1$, наименьшая.

РЕГИОНАЛЬНАЯ ОЛИМПИАДА ПО МАТЕМАТИКЕ

11 класс

Вариант 2

1. Сравните числа $\sin 20^\circ \cdot \cos 40^\circ$ и $\sin 80^\circ$.
2. Решите уравнение $\sqrt{x^2 + 2x} - \sqrt{x^2 - 3x} = \sqrt{-5x}$.
3. Решите неравенство $\sqrt{x^6 - 2x^3 + 1} \leq 1 - x$.
4. Изобразите множество точек плоскости Oxy , для которых верно равенство $\log_2(\cos x \cdot \cos y) = \log_2 |\cos x| + \log_2 |\cos y|$.
5. Решите систему уравнений
$$\begin{cases} y(xy + 24) = x^3, \\ x(xy - 6) = y^3. \end{cases}$$
6. Определите, при каких значениях параметра a уравнение $8^x + (2 - a) \cdot 4^x - a \cdot 2^x + a^2 - 2a = 0$ имеет единственное решение.
7. Определите стоимость набора из 3 кг печенья, 4 кг конфет и 5 кг пряников, если 2 кг печенья, 3 кг конфет и 4 кг пряников стоят вместе 220 рублей, а 1 кг печенья, 2 кг конфет и 3 кг пряников стоят 145 рублей.
8. Из вершины прямого угла прямоугольного треугольника провели высоту. Периметры полученных тем самым треугольников равны 3 и 4. Найдите периметр исходного треугольника.
9. Куб с длиной ребра 4 повернули вокруг высоты, проходящей через центр его основания, на угол 45° . Докажите, что объем общей части исходного и полученного кубов не меньше чем 32.
10. Определите, при каком значении параметра a площадь фигуры, ограниченной линиями $y = x + \sin^2 x$, $y = x - \cos^2 x - x^2$, $x = a$, $x = a - 1$, наименьшая.

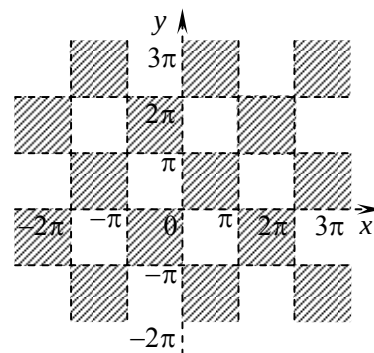
Санкт-Петербургский государственный университет
физический факультет
2004–2005 учебный год, март

РЕГИОНАЛЬНАЯ ОЛИМПИАДА ПО МАТЕМАТИКЕ

11 класс

Ответы к варианту 1

1. $\sin 10^\circ \cdot \cos 20^\circ < \sin 40^\circ$. 2. $\{0\}$. 3. $[-1; 0] \cup \{1\}$. 4. см. рисунок.
5. $\{(0; 0); (4; -2); (-4; 2)\}$. 6. $a \in (-\infty; 0) \cup [2; +\infty) \cup \{1\}$. 7. 890 руб.
8. 5. 10. $a = -\frac{1}{2}$.



Санкт-Петербургский государственный университет
физический факультет
2004–2005 учебный год, март

РЕГИОНАЛЬНАЯ ОЛИМПИАДА ПО МАТЕМАТИКЕ

11 класс

Ответы к варианту 2

1. $\sin 20^\circ \cdot \cos 40^\circ < \sin 80^\circ$. 2. $\{0\}$. 3. $[0; 1] \cup \{-1\}$. 4. см. рисунок.
5. $\{(0; 0); (4; 2); (-4; -2)\}$. 6. $a \in (0; 2] \cup \{4\}$. 7. 295 рублей. 8. 5.
10. $a = \frac{1}{2}$.

