

Санкт-Петербургский государственный университет
физический факультет
2004–2005 учебный год

ЗАОЧНАЯ ОЛИМПИАДА ПО МАТЕМАТИКЕ

11 класс

1. Решите уравнение $|\dots| + |2005x| + 1| + 2| + \dots| + 2004| = 20052005$.
2. Решите неравенство $\sqrt{x+2004} + \sqrt{x+2005} + \sqrt{x+2008} \leq 3$.
3. Решите уравнение

$$\log_{2005}(x^{2005} + x^{2004} - 1)\log_{2004}(x^{2005} - x^{2004}) = \log_{2004}(x^{2005} + x^{2004} - 1)\log_{2005}(x^{2005} - x^{2004}).$$

4. Решите уравнение $(x^2 + 2005x - 2005)^2 + 2005(x^2 + 2005x - 2005) - 2005 = x$.
5. Решите уравнение $\sin x \cos 2x \sin 3x \cos 4x \dots \cos 2004x \sin 2005x = 1$.
6. Сравните, в зависимости от x , суммы: $1^x + 2^x + \dots + 2004^x + 2005^x$ и $(1 + 2 + \dots + 2004 + 2005)^x$.
7. Определите количество корней уравнения $\log_{\frac{1}{16}} x = \left(\frac{1}{16}\right)^x$.
8. Три населенных пункта A , B и C соединены прямолинейными дорогами. К отрезку дороги AB примыкает квадратное поле, со стороной, равной $0,5AB$; к дороге BC примыкает квадратное поле со стороной, равной BC ; к дороге AC примыкает прямоугольный участок леса длиной, равной AC , и шириной 4 км. Площадь леса на 20 км² больше суммы площадей квадратных полей. Найдите ее.
9. Решите систему уравнений
$$\begin{cases} x^{2004} + y^{2004} = 1, \\ x^{2005} + y^{2005} = 1. \end{cases}$$
10. Дан прямой круговой цилиндр с радиусом основания r и с высотой h . Найдите наименьшее и наибольшее возможное значение его ортогональной проекции на плоскость.

Санкт-Петербургский государственный университет
физический факультет
2004–2005 учебный год

ЗАОЧНАЯ ОЛИМПИАДА ПО МАТЕМАТИКЕ

11 класс

Ответы к варианту

1. $\{-8999; 8999\}$. 2. $\{-2004\}$. 3. $(1; +\infty)$. 4. $\{-1003 - 2\sqrt{251502}; -2005; -1003 + 2\sqrt{251502}; 1\}$.
5. $\left\{\frac{\pi}{2} + 2\pi k : k \in \mathbb{Z}\right\}$. 6. При $x < 1$ левая сумма больше, при $x = 1$ суммы равны, при $x > 1$ правая
сумма больше. 7. 3. 8. 40 км^2 . 9. $\{(1; 0); (0; 1)\}$. 10. Наибольшее значение: $\sqrt{4r^2h^2 + \pi^2r^4}$;
наименьшее значение: πr^2 , если $\frac{h}{r} \leq \frac{\pi}{2}$, $2rh$, если $\frac{h}{r} > \frac{\pi}{2}$.