

Санкт–Петербургский государственный университет
физический факультет
2005–2006 учебный год, январь

РЕГИОНАЛЬНАЯ ОЛИМПИАДА ПО МАТЕМАТИКЕ

11 класс

Вариант 1

1. Сравните числа $(\sqrt{2006} - \sqrt{2005} + \sqrt{2004})^{-1}$ и $(\sqrt{2008} + \sqrt{2007} - \sqrt{2006})^{-1}$.
2. Решите уравнение $x^2 + x + 2x\sqrt{\frac{x+1}{x}} + 1 = 0$.
3. Решите неравенство $2^{\log_2^2 x} + x^{2\log_2 x} \geq 6$.
4. Изобразите множество точек плоскости Oxy , для которых верно равенство $|x| + |y - x| = |y|$.
5. Найдите количество целочисленных решений уравнения $|x| + |1 - y| + |y - x| = 1$.
6. Решите систему уравнений
$$\begin{cases} x + y + z = 15; \\ x^2 + y^2 + z^2 = 75. \end{cases}$$
7. Воспользовавшись равенством $\sin 108^\circ = \sin 72^\circ$, найдите $\sin 36^\circ$.
8. В треугольник со сторонами 3, 3 и 2 вписали окружность. Точки касания окружности со сторонами треугольника соединили, и в полученный треугольник снова вписали окружность. Найдите ее радиус.
9. Обозначим в правильной треугольной пирамиде угол наклона бокового ребра к плоскости основания α , угол наклона боковой грани к плоскости основания — β , плоский угол при вершине — γ . Известно, что $\gamma = 2\alpha$. Найдите α , β , γ .
10. Найдите значение параметра a , при котором верно равенство:
$$\int_a^{66} ||x| - 1| - 1| dx = 2100.$$

РЕГИОНАЛЬНАЯ ОЛИМПИАДА ПО МАТЕМАТИКЕ

11 класс

Вариант 2

1. Сравните числа $(\sqrt{2005} - \sqrt{2004} + \sqrt{2003})^{-1}$ и $(\sqrt{2007} + \sqrt{2006} - \sqrt{2005})^{-1}$.
2. Решите уравнение $x^2 - x + 2x\sqrt{\frac{x-1}{x}} + 1 = 0$.
3. Решите неравенство $5^{2\log_5 x} - 4x^{\log_5 x} \geq 5$.
4. Изобразите множество точек плоскости Oxy , для которых верно равенство $|y| + |x - y| = |x|$.
5. Найдите количество целочисленных решений уравнения $|y| + |1 - x| + |x - y| = 1$.
6. Решите систему уравнений
$$\begin{cases} x + y + z = 18; \\ x^2 + y^2 + z^2 = 108. \end{cases}$$
7. Воспользовавшись равенством $\sin 108^\circ = -\cos 162^\circ$, найдите $\cos 54^\circ$.
8. В треугольник со сторонами 5, 5 и 4 вписали окружность. Точки касания окружности со сторонами треугольника соединили, и в полученный треугольник снова вписали окружность. Найдите ее радиус.
9. Обозначим в правильной четырехугольной пирамиде угол наклона бокового ребра к плоскости основания α , угол наклона боковой грани к плоскости основания — β , плоский угол при вершине — γ . Известно, что $\gamma = 2\alpha$. Найдите α , β , γ .
10. Найдите значение параметра a , при котором верно равенство:
$$\int_{-66}^a ||x| - 1| dx = 2100.$$

РЕГИОНАЛЬНАЯ ОЛИМПИАДА ПО МАТЕМАТИКЕ

11 класс

Ответы к варианту 1

1. Левое число больше правого.

2. $\left\{ \frac{-1 + \sqrt{5}}{2} \right\}$.

3. $(0; 0,5] \cup [2; +\infty)$

4. См. рис.

5. 3 пары решений.

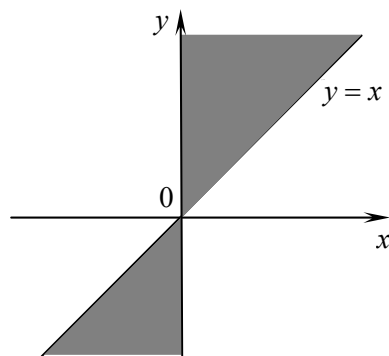
6. $\{(5; 5; 5)\}$.

7. $\sin 36^\circ = \frac{\sqrt{10 - 2\sqrt{5}}}{4}$.

8. $\frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{3}$.

9. $\alpha = \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{3}}{2}$, $\beta = \frac{\pi}{3}$, $\gamma = 2 \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{3}}{2}$.

10. $a = -12$.



РЕГИОНАЛЬНАЯ ОЛИМПИАДА ПО МАТЕМАТИКЕ

11 класс

Ответы к варианту 2

1. Левое число больше.

2. $\left\{ \frac{1-\sqrt{5}}{2} \right\}$.

3. $(-0; 0, 2] \cup [5; +\infty)$.

4. См. рис.

5. 3 пары решений.

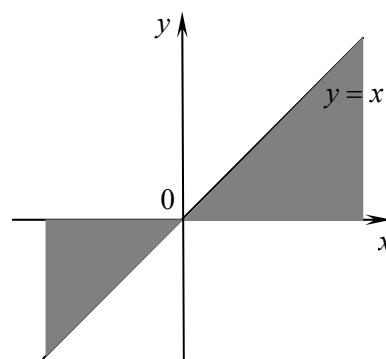
6. $\{(6; 6; 6)\}$.

7. $\cos 54^\circ = \frac{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{4}$.

8. $\frac{6\sqrt{21}}{15+5\sqrt{30}}$.

9. $\alpha = \operatorname{arctg} \frac{1}{\sqrt{2}}, \beta = \frac{\pi}{4}, \gamma = 2 \operatorname{arctg} \frac{1}{\sqrt{2}}$.

10. $a=12$.



РЕГИОНАЛЬНАЯ ОЛИМПИАДА ПО МАТЕМАТИКЕ

11 класс

Решения задач варианта 1

1. Сравните числа $(\sqrt{2006} - \sqrt{2005} + \sqrt{2004})^{-1}$ и $(\sqrt{2008} + \sqrt{2007} - \sqrt{2006})^{-1}$.

Заметим, что

$$\begin{aligned} \sqrt{2006} - \sqrt{2005} + \sqrt{2004} &< \sqrt{2008} + \sqrt{2007} - \sqrt{2006} \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \sqrt{2006} + \sqrt{2006} + \sqrt{2004} &< \sqrt{2008} + \sqrt{2007} + \sqrt{2005}, \end{aligned}$$

поэтому левое число больше правого.

2. Решите уравнение $x^2 + x + 2x\sqrt{\frac{x+1}{x}} + 1 = 0$.

В зависимости от знака x возможны два случая:

$$\begin{aligned} x^2 + x + 2x\sqrt{\frac{x+1}{x}} + 1 = 0 &\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + x + 2\sqrt{x^2 + x} + 1 = 0, & x > 0; \\ x^2 + x + 2\sqrt{x^2 + x} + 1 = 0, & x < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (\sqrt{x^2 + x} + 1)^2 = 0, & x > 0; \\ (\sqrt{x^2 + x} - 1)^2 = 0, & x < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{x^2 + x} = -1, & x > 0; \\ \sqrt{x^2 + x} = 1, & x < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \sqrt{x^2 + x} = 1, & x < 0 \Leftrightarrow x^2 + x = 1, & x < 0 \Leftrightarrow x = \frac{-1 + \sqrt{5}}{2}. \end{aligned}$$

Ответ: $\left\{ \frac{-1 + \sqrt{5}}{2} \right\}$.

3. Решите неравенство $2^{\log_2^2 x} + x^{2\log_2 x} \geq 6$.

Справедливы следующие переходы:

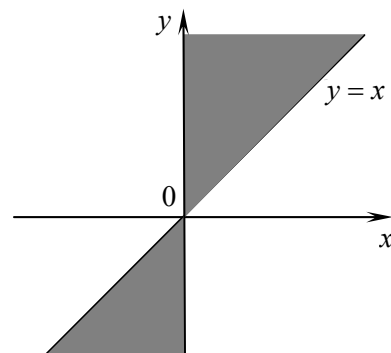
$$2^{\log_2^2 x} + x^{2\log_2 x} \geq 6 \Leftrightarrow x^{2\log_2 x} + x^{\log_2 x} - 6 \geq 0 \Leftrightarrow x^{\log_2 x} \geq 2 \Leftrightarrow \log_2^2 x \geq 1 \Leftrightarrow \begin{cases} \log_2 x \geq 1; \\ \log_2 x \leq -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 2; \\ 0 < x \leq \frac{1}{2}. \end{cases}$$

4. Изобразите множество точек плоскости Oxy , для которых верно равенство $|x| + |y - x| = |y|$.

Поскольку сумма модулей двух величин равна модулю их суммы в том и только в том случае, когда они имеют одинаковый знак, имеем

$$|x| + |y - x| = |y| \Leftrightarrow |x| + |y - x| = |x + (y - x)| \Leftrightarrow x(y - x) \geq 0.$$

Тогда в правой полуплоскости оно представляет собой точки, лежащие не ниже, а в левой полуплоскости — не выше прямой $y = x$.



5. Найдите количество решений уравнения в целых числах $|x| + |1 - y| + |y - x| = 1$.

Поскольку никакой из модулей не может превосходить единицы, можно рассмотреть три случая:

$$|x| + |1-y| + |y-x| = 1 \Leftrightarrow \begin{cases} x=0, & |1-y| + |y|=1; \\ x=1, & 1 + |1-y| + |y-1|=1; \Leftrightarrow \\ x=-1, & 1 + |1-y| + |y+1|=1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x=0, & |1-y| + |y|=1; \\ x=1, & |1-y| + |y-1|=0; \Leftrightarrow \\ x=-1, & |1-y| + |y+1|=0 \end{cases} \begin{cases} x=0, & y=1; \\ x=0, & y=0; \\ x=1, & y=1. \end{cases}$$

Заданное уравнение имеет 3 пары решений.

6. Решите систему уравнений
$$\begin{cases} x + y + z = 15; \\ x^2 + y^2 + z^2 = 75. \end{cases}$$

1 способ. Вычтем из второго уравнения первое, предварительно умножив на 10 обе его части. Имеем

$$x^2 + y^2 + z^2 - 10x - 10y - 10z = -75 \Leftrightarrow (x-5)^2 + (y-5)^2 + (z-5)^2 = 0 \Leftrightarrow x = y = z = 5.$$

Проверка показывает, что полученные числа являются решениями системы.

2 способ. Поскольку

$$(x + y + z)^2 = x^2 + y^2 + z^2 + 2(xy + yz + zx),$$

используя первое и второе уравнение, получим

$$225 = 75 + 2(xy + yz + zx) \Leftrightarrow xy + yz + zx = 75.$$

По неравенству Коши-Буняковского-Шварца $(x^2 + y^2 + z^2)(y^2 + z^2 + x^2) \geq (xy + yz + zx)^2$, в нашем случае мы имеем равенство, что соответствует коллинеарности векторов $(x; y; z)$ и $(y; z; x)$. Тогда $x = ty$, $y = tz$, $z = tx$, откуда $xyz = t^3xyz \Leftrightarrow t = 1$, что дает $x = y = z$.

3 способ. Вычитая из квадрата первого уравнения второе, получим

$$(x + y + z)^2 - (x^2 + y^2 + z^2) = 225 - 75 \Leftrightarrow 2xy + 2yz + 2zx = 150.$$

Вычтем из удвоенного второго уравнения полученное, имеем

$$2x^2 + 2y^2 + 2z^2 - 2xy - 2yz - 2zx = 0 \Leftrightarrow (x-y)^2 + (y-z)^2 + (z-x)^2 = 0 \Leftrightarrow x = y = z.$$

Тогда из первого уравнения $x = y = z = 5$. Найденные числа — решения системы.

4 способ. Запишем первое уравнение в виде $(x-5) + (y-5) + (z-5) = 0$ и введем новые переменные: $x-5 = a$, $y-5 = b$, $z-5 = c$. Тогда

$$a^2 + b^2 + c^2 = x^2 + y^2 + z^2 + 75 - 10(x + y + z) = 75 + 75 - 10 \cdot 15 = 0,$$

откуда $a = b = c = 0$, что дает $x = y = z = 5$.

5 способ. Рассмотрим два вектора: $(x; y; z)$ и $(1; 1; 1)$, с длинами $\sqrt{75}$ и $\sqrt{3}$ соответственно. Первое уравнение системы представляет собой их скалярное произведение:

$$15 = x + y + z = (x; y; z) \cdot (1; 1; 1) = |(x; y; z)| \cdot |(1; 1; 1)| \cdot \cos \alpha = \sqrt{75} \cdot \sqrt{3} \cos \alpha = 15 \cos \alpha,$$

где α — угол между ними. Поскольку $\cos \alpha = 1$ векторы коллинеарны, откуда $x = y = z$, что и дает ответ.

6 способ. Первое уравнение системы задает плоскость, второе — сферу радиуса $\sqrt{75}$ с центром в начале координат. Покажем, что плоскость касается сферы. Используя формулу для расстояния от точки $(x_0; y_0; z_0)$ до плоскости $Ax + By + Cz + D = 0$

$$d = \frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}},$$

получим

$$d = \frac{|1 \cdot 0 + 1 \cdot 0 + 1 \cdot 0 - 15|}{\sqrt{1^2 + 1^2 + 1^2}} = \frac{15}{\sqrt{3}} = \sqrt{75}.$$

Таким образом, расстояние от центра сферы до заданной плоскости равно радиусу сферы, что соответствует случаю их касания. Тогда система имеет единственное решение, которое можно угадать. Итак, $x = y = z = 5$.

Если решение угадать не удастся, поступим формально: требуется определить вектор, с началом в начале координат, конец которого лежит на плоскости $x + y + z = 15$, коллинеарный вектору нормали к плоскости. Тогда искомый вектор имеет координаты $k \cdot (1; 1; 1) = (k; k; k)$. Поскольку координаты удовлетворяют уравнению плоскости, получаем $k + k + k = 15$. Отсюда $k = 5$, и тогда $x = y = z = 5$.

7. Воспользовавшись равенством $\sin 108^\circ = \sin 72^\circ$, найдите $\sin 36^\circ$.

Пусть $36^\circ = \alpha$, имеем

$$\begin{aligned} \sin 3\alpha = \sin 2\alpha &\Leftrightarrow 3\sin \alpha - 4\sin^3 \alpha = 2\sin \alpha \cos \alpha \Leftrightarrow 3 - 4\sin^2 \alpha = 2\cos \alpha \Leftrightarrow \\ 3 - 4(1 - \cos^2 \alpha) &= 2\cos \alpha \Leftrightarrow 4\cos^2 \alpha - 2\cos \alpha - 1 = 0 \Leftrightarrow \cos \alpha = \frac{1 + \sqrt{5}}{4}. \end{aligned}$$

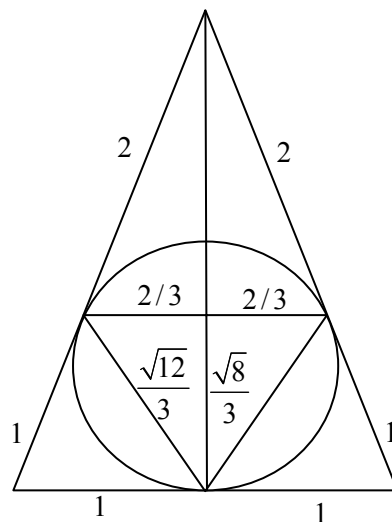
Тогда

$$\sin 36^\circ = \sin \alpha = \sqrt{1 - \cos^2 \alpha} = \sqrt{1 - \left(\frac{1 + \sqrt{5}}{4}\right)^2} = \frac{\sqrt{10 - 2\sqrt{5}}}{4}.$$

8. В треугольник со сторонами 3, 3 и 2 вписали окружность. Точки касания окружности со сторонами треугольника соединили, и в полученный треугольник снова вписали окружность. Найдите ее радиус.

Длины всех отрезков обозначены на рисунке. Искомый радиус есть

$$r = \frac{S}{p} = \frac{\frac{1}{2} \cdot \frac{4}{3} \cdot \frac{\sqrt{8}}{3}}{\frac{1}{2} \left(\frac{4}{3} + 2 \cdot \frac{\sqrt{12}}{3} \right)} = \frac{8\sqrt{2}}{3(4 + 4\sqrt{3})} = \frac{2\sqrt{2}}{3(1 + \sqrt{3})} = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{3}.$$



9. Обозначим в правильной треугольной пирамиде угол наклона бокового ребра к плоскости основания α , угол наклона боковой грани к плоскости основания — β , плоский угол при вершине — γ . Известно, что $\gamma = 2\alpha$. Найдите α , β , γ .

Пусть R и r — радиусы описанной и вписанной в основание окружностей соответственно. Тогда

$$R \operatorname{tg} \alpha = r \operatorname{tg} \beta \text{ и } \frac{R}{\cos \alpha} \cos \frac{\gamma}{2} = \frac{r}{\cos \beta}.$$

Поскольку $R = 2r$ и $\gamma = 2\alpha$, имеем $\beta = \frac{\pi}{3}$, откуда $\alpha = \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{3}}{2}$ и $\gamma = 2 \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{3}}{2}$, что и дает ответ.

10. Найдите значение параметра a , при котором верно равенство: $\int_a^{66} ||x| - 1| - 1| dx = 2100$.

Отметим, что площадь подграфика на отрезке $[2; 66]$ есть $\frac{1}{2} \cdot 64^2 = 2048$, а площадь, соответствующая отрезку $[-2; 2]$, равна 2. Таким образом, площадь, соответствующая отрезку $[a; -2]$ должна равняться 50. Имеем уравнение $\frac{1}{2}(-2 - a)^2 = 50 \Leftrightarrow a = -12$.