

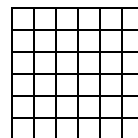
Санкт–Петербургский государственный университет
физический факультет
2005–2006 учебный год, март

РЕГИОНАЛЬНАЯ ОЛИМПИАДА ПО МАТЕМАТИКЕ

11 класс

Вариант 1

1. Сравните числа $\log_3 \sin 2$ и $\log_2 \sin 3$.
2. Решите уравнение $\sqrt{x^2 - |2x - 1|} = 2x - |x + 1|$.
3. Решите неравенство $\arcsin^2 x > \arccos^2 x$.
4. Решите систему уравнений
$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 1; \\ 8x^3 - 2x^2 - 6x = 2y^2 + \sqrt{3} - 2. \end{cases}$$
5. Фрагмент решетки представляет собой квадрат, изображенный на рисунке. Сколько всего квадратов со сторонами параллельными сторонам фрагмента образовано его узлами?
6. Найдите все значения параметра a , при которых уравнение $\log_2(x^4 + 2a^2) = \log_2(1 - ax^2) + 1$ имеет единственное решение.
7. Докажите равенство:
$$\int_{-2005}^{2006} |||x - 1| - 2| - 1| dx = \int_{-2005}^{2006} |||x - 1| - 1| - 1| - 1| dx.$$
8. Решите уравнение $10^{x-1} = x^9$.
9. В прямоугольном треугольнике с катетами 2 и 4 расстояния от вершин острых углов до некоторой точки, лежащей внутри треугольника, равны $\sqrt{2}$ и $\sqrt{10}$. Найдите расстояние от нее до вершины прямого угла этого треугольника.
10. В правильной призме $ABCD A'B'C'D'$ длины сторон основания $ABCD$ равны 1, а длины боковых ребер равны 2. Через ребро AB проведена плоскость, делящая двугранный угол при основании пополам и пересекающая боковые ребра CC' и DD' в точках P и Q соответственно. Найдите объем пирамиды $B'ABPQ$.



РЕГИОНАЛЬНАЯ ОЛИМПИАДА ПО МАТЕМАТИКЕ

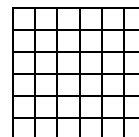
11 класс

Вариант 2

1. Сравните числа $\log_5 \cos 5$ и $\log_6 \cos 6$.
2. Решите уравнение $\sqrt{x^2 - |2x + 1|} = -2x - |1 - x|$.
3. Решите неравенство $\arctg^2 x \leq \operatorname{arccctg}^2 x$.
4. Решите систему уравнений
$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 1; \\ 8x^3 - 2x^2 - 6x = 2y^2 - \sqrt{3} - 2. \end{cases}$$
5. Фрагмент решетки представляет собой квадрат, изображенный на рисунке. Сколько всего квадратов, со сторонами параллельными диагоналям фрагмента, образовано его узлами?
6. Найдите все значения параметра a , при которых уравнение $\log_3(ax^2 + 3) = \log_3(a^2 - x^4) + 1$ имеет единственное решение.
7. Докажите равенство:

$$\int_{-2006}^{2005} |||x + 1| - 2| - 1| \, dx = \int_{-2006}^{2005} |||x + 1| - 1| - 1| \, dx.$$

8. Решите уравнение $8^{x-1} = x^7$.
9. В прямоугольном треугольнике с катетами 3 и 6 расстояния от вершин острых углов до некоторой точки, лежащей внутри треугольника, равны $\sqrt{5}$ и $\sqrt{26}$. Найдите расстояние от нее до вершины прямого угла этого треугольника.
10. В правильной призме $ABCD A'B'C'D'$ длины сторон основания $ABCD$ равны 1, а длины боковых ребер равны 2. Через ребро AB проведена плоскость, делящая двугранный угол при основании пополам и пересекающая боковые ребра CC' и DD' в точках P и Q соответственно. Найдите объем пирамиды $D'ABPQ$.



РЕГИОНАЛЬНАЯ ОЛИМПИАДА ПО МАТЕМАТИКЕ

11 класс

Ответы к варианту 1

1. Левое число больше правого.
2. $[1; +\infty)$.
3. $\left[\frac{\sqrt{2}}{2}; 1\right]$.
4. $\left\{\left(\cos\frac{\pi}{18}; -\sin\frac{\pi}{18}\right); \left(\cos\frac{\pi}{18}; \sin\frac{\pi}{18}\right); \left(\cos\frac{13\pi}{18}; -\sin\frac{13\pi}{18}\right); \right.$
 $\left.\left(\cos\frac{13\pi}{18}; \sin\frac{13\pi}{18}\right); \left(\cos\frac{25\pi}{18}; -\sin\frac{25\pi}{18}\right); \left(\cos\frac{25\pi}{18}; \sin\frac{25\pi}{18}\right)\right\}$.
5. 91 квадрат.
6. $a = 1$.
7. Подынтегральные выражения равны.
8. $\{1; 10\}$.
9. $\frac{\sqrt{170}}{5}$ или $\sqrt{2}$.
10. $\frac{2}{3}$.

РЕГИОНАЛЬНАЯ ОЛИМПИАДА ПО МАТЕМАТИКЕ

11 класс

Ответы к варианту 2

1. Правое число больше.
2. $(-\infty; -1]$.
3. $(-\infty; 1]$.
4. $\left\{ \left(\cos \frac{5\pi}{18}; -\sin \frac{5\pi}{18} \right); \left(\cos \frac{5\pi}{18}; \sin \frac{5\pi}{18} \right); \left(\cos \frac{7\pi}{18}; -\sin \frac{7\pi}{18} \right); \right.$
 $\left. \left(\cos \frac{7\pi}{18}; \sin \frac{7\pi}{18} \right); \left(\cos \frac{17\pi}{18}; -\sin \frac{17\pi}{18} \right); \left(\cos \frac{17\pi}{18}; \sin \frac{17\pi}{18} \right) \right\}$.
5. 35 квадратов.
6. $a = 1$.
7. Подынтегральные выражения равны.
8. $\{1; 8\}$.
9. $\sqrt{2}$ или $\sqrt{29}$.
10. $\frac{1}{3}$.