

Санкт–Петербургский государственный университет
физический факультет
2006–2007 учебный год, январь

РЕГИОНАЛЬНАЯ ОЛИМПИАДА ПО МАТЕМАТИКЕ

11 класс

Вариант 1

1. Сравните числа $\operatorname{ctg} \frac{3\pi}{8} + \operatorname{tg} \frac{5\pi}{24}$ и $\sqrt{3}$.
2. Решите неравенство $|x| + \sqrt{|x+2|-1} \geq x$.
3. Пусть в стране L подоходный налог на зарплату начисляется следующим образом: с суммы не превышающей 1000 денежных единиц взимается 15% налога, с дохода от 1000 до 2000 тысяч денежных единиц с первой тысячи взимается 15%, а с оставшейся суммы взимается 25%, если же доход превышает 2000 единиц, то с первой тысячи взимается 15%, со второй — 25%, с оставшейся суммы взимается 50% налога. Каков (в процентах) итоговый налог выплачивает гражданин этой страны, получающий после выплаты налогов зарплату в 2600 денежных единиц?
4. Решите уравнение $3^{3x} - \frac{27}{3^{3x}} - 9\left(3^x - \frac{3}{3^x}\right) = 8$.
5. Решите уравнение $3^m + 3^{2m} + 3^{3m} + \dots + 3^{k \cdot m} = 2007$ в целых числах.
6. Решите систему уравнений
$$\begin{cases} \sin x + \frac{1}{\sin x} = \sin^2 y - 2, \\ \cos y + \frac{1}{\cos y} = \cos^2 x + 2. \end{cases}$$
7. Определите, при каких значениях параметра a уравнение $|x| = a \log_2 |x|$ имеет ровно два решения.
8. Найдите, в каких пределах изменяется высота прямоугольного треугольника, проведённая из вершины прямого угла, если длина одного из его катетов равна a , а длина другого не меньше $2a$.
9. Найдите площадь фигуры, ограниченной линиями: $x = \sqrt{y}$, $x = (y+1)^3$, $x = 0$, $x = 1$.
10. Центры одинаковых шаров радиуса 1 лежат в вершинах прямой призмы боковое ребро которой равно 4, а основание — треугольник со сторонами 3, 4, 5. Найдите сумму объёмов частей этих шаров, лежащих внутри призмы.

РЕГИОНАЛЬНАЯ ОЛИМПИАДА ПО МАТЕМАТИКЕ

11 класс

Вариант 2

1. Сравните числа $\operatorname{ctg} \frac{\pi}{8} + \operatorname{tg} \frac{5\pi}{24}$ и 2.
2. Решите неравенство $|x| \sqrt{|x+2|-1} \leq x$.
3. Пусть в стране Π подоходный налог на зарплату начисляется следующим образом: с суммы не превышающей 1000 денежных единиц взимается 50% налога, с дохода от 1000 до 2000 тысяч денежных единиц с первой тысячи взимается 50%, а с оставшейся суммы взимается 25%, если же доход превышает 2000 единиц, то с первой тысячи взимается 50%, со второй — 25%, с оставшейся суммы взимается 15% налога. Каков (в процентах) итоговый налог выплачивает гражданин этой страны, получающий после выплаты налогов зарплату в 3800 денежных единиц?
4. Решите уравнение $2^{3x} - \frac{8}{2^{3x}} - 6\left(2^x - \frac{2}{2^x}\right) = 1$.
5. Решите уравнение $2^n + 2^{2n} + 2^{3n} + \dots + 2^{k \cdot n} = 2006$ в целых числах.
6. Решите систему уравнений
$$\begin{cases} \sin x + \frac{1}{\sin x} = 2 + \sin^2 y, \\ \cos y + \frac{1}{\cos y} = 2 - \cos^2 x. \end{cases}$$
7. Определите, при каких значениях параметра a уравнение $a|x| = \log_{0,5}|x|$ имеет ровно два решения.
8. Найдите, в каких пределах изменяется высота прямоугольного треугольника, проведённая из вершины прямого угла, если длина одного из его катетов равна a , а длина другого не больше $2a$.
9. Найдите площадь фигуры, ограниченной линиями: $x = y^3$, $x = \sqrt{y-1}$, $x = 0$, $x = 1$.
10. Центры одинаковых шаров радиуса 1 лежат в вершинах прямой призмы боковое ребро которой равно 6, а основание — треугольник со сторонами 3, 3, 5. Найдите сумму объёмов частей этих шаров, лежащих внутри призмы.

Санкт–Петербургский государственный университет
физический факультет
2006–2007 учебный год, январь

РЕГИОНАЛЬНАЯ ОЛИМПИАДА ПО МАТЕМАТИКЕ

11 класс

Ответы к варианту 1

1. Правое число больше.
2. $(-\infty; -3] \cup [-1; +\infty)$.
3. 35%.
4. $\{1\}$.
5. $m = 0$, $k = 2007$.
6. $\left\{ \left(-\frac{\pi}{2} + \pi k; 2\pi l \right) : k, l \in \mathbb{Z} \right\}$.
7. $a < 0$, $a = e^{\ln 2}$.
8. $\left[\frac{2}{\sqrt{5}} a; a \right)$.
9. $\frac{7}{12}$.
10. $\frac{2}{3}\pi$.

Санкт–Петербургский государственный университет
физический факультет
2006–2007 учебный год, январь

РЕГИОНАЛЬНАЯ ОЛИМПИАДА ПО МАТЕМАТИКЕ

11 класс

Ответы к варианту 2

1. Левое число больше.
2. $\{0\}$.
3. 24%.
4. $\{1\}$.
5. $n = 0$, $k = 2006$.
6. $\left\{ \left(\frac{\pi}{2} + \pi k; 2\pi l \right) : k, l \in \mathbb{Z} \right\}$.
7. $\left\{ -\frac{1}{e \ln 2} \right\} \cup [0; +\infty)$.
8. $\left(0; \frac{2}{\sqrt{5}} a \right]$.
9. $\frac{7}{12}$.
10. $\frac{2}{3}\pi$.