

Санкт–Петербургский государственный университет
физический факультет
2006–2007 учебный год, март

РЕГИОНАЛЬНАЯ ОЛИМПИАДА ПО МАТЕМАТИКЕ

11 класс

Вариант 1

1. Сравните числа $3^{\sqrt{\log_3 2}}$ и $2^{\sqrt{\log_2 3}}$.
2. Решите уравнение $\cos x \cos 3x - 1 = 0$.
3. Решите систему
$$\begin{cases} x = \sqrt{4y - 3}, \\ y = \sqrt{4x - 3}. \end{cases}$$
4. Решите неравенство $2^x + 2^{2x} + 2^{3x} + \dots \leq 2$.
5. Решите уравнение $\sqrt{x+1}(3x^2 + x + 1) = x^3 + 3x^2 + 3x$.
6. Решите уравнение $\sqrt{\sin(\pi \log_2 x)} = \ln(\sin(\pi |x + 0,5|))$.
7. Изобразите множество точек плоскости xOy , координаты которых удовлетворяют неравенству $\log_2 |y - x| \geq \log_2 x$.
8. Определите площадь фигуры, ограниченной тремя линиями: $y = 1 - x^2$, $y = \sqrt{x} + 1$, $x = 1$.
9. В прямоугольном треугольнике ABC на катетах AB и AC отмечены точки P и Q соответственно, такие что $AP = 1$, $PB = 2$, $AQ = 1$, $QC = 3$. Точка M делит гипотенузу в отношении 2:3, считая от вершины B . Определите, в каком отношении точка O пересечения отрезков PC и MQ делит эти отрезки.
10. В основании пирамиды высотой 4 лежит квадрат со стороной 2. Одно из ее боковых ребер перпендикулярно плоскости основания. Найдите расстояние от него до скрещивающихся с ним медиан боковой грани.

РЕГИОНАЛЬНАЯ ОЛИМПИАДА ПО МАТЕМАТИКЕ

11 класс

Вариант 2

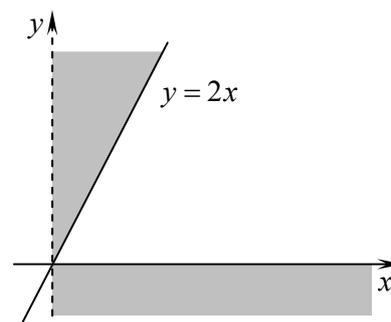
1. Сравните числа $5^{\sqrt{\log_5 3}}$ и $3^{\sqrt{\log_3 5}}$.
2. Решите уравнение $1 + \sin x \sin 3x = 0$.
3. Решите систему
$$\begin{cases} x = \sqrt{3y - 2}, \\ y = \sqrt{3x - 2}. \end{cases}$$
4. Решите неравенство $3^x + 3^{2x} + 3^{3x} + \dots \leq 4$.
5. Решите уравнение $\sqrt{1-x}(3x^2 - x + 1) = x^3 - 3x^2 + 3x$.
6. Решите уравнение $\sqrt{\sin(\pi \log_3 x)} = \ln(\cos(\pi |x + 1|))$.
7. Изобразите множество точек плоскости xOy , координаты которых удовлетворяют неравенству $\log_{0,5} |y + x| \geq \log_{0,5} y$.
8. Определите площадь фигуры, ограниченной тремя линиями: $y = (x - 1)^2$, $y = \sqrt{1 - x}$, $y = 1$.
9. В прямоугольном треугольнике ABC на катетах AB и AC отмечены точки P и Q соответственно, такие что $AP = 1$, $PB = 2$, $AQ = 3$, $QC = 1$. Точка M делит гипотенузу в отношении 2:3, считая от вершины B . Определите, в каком отношении точка O пересечения отрезков BQ и PM делит эти отрезки.
10. В основании пирамиды высотой 2 лежит квадрат со стороной 4. Одно из ее боковых ребер перпендикулярно плоскости основания. Найдите расстояние от него до скрещивающихся с ним медиан боковой грани.

РЕГИОНАЛЬНАЯ ОЛИМПИАДА ПО МАТЕМАТИКЕ

11 класс

Ответы к варианту 1

1. Числа равны.
2. $\{\pi k : k \in \mathbb{Z}\}$.
3. $\{(1; 1); (3; 3)\}$.
4. $\left(-\infty; \log_2 \frac{2}{3}\right]$.
5. $\left\{\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right\}$.
6. $\{2^k : k \in \mathbb{N}\}$.
7. См. рис.
8. 1.
9. 9:5 и 5:2.
10. $\sqrt{2}$, 1.



РЕГИОНАЛЬНАЯ ОЛИМПИАДА ПО МАТЕМАТИКЕ

11 класс

Ответы к варианту 2

1. Числа равны.
2. $\left\{ \frac{\pi}{2} + \pi k : k \in \mathbb{Z} \right\}$.
3. $\{(1; 1); (2; 2)\}$.
4. $\left(-\infty; \log_3 \frac{4}{5} \right]$.
5. $\left\{ \frac{\sqrt{5}-1}{2} \right\}$.
6. $\{3^k : k \in \{0\} \cup \mathbb{N}\}$.
7. См. рис.
8. 1.
9. 4:5 и 5:1.
10. $2\sqrt{2}, 2$.

