

Санкт–Петербургский государственный университет  
физический факультет  
2007–2008 учебный год, март

## РЕГИОНАЛЬНАЯ ОЛИМПИАДА ПО МАТЕМАТИКЕ

### 11 класс

### Вариант 1

1. Сравните числа  $\int_0^1 e^x dx$  и  $\int_{-1}^0 0,5^x dx$ .
2. Найдите точку минимума функции
$$f(x) = (x-1)^2 + (x-2)^2 + (x-3)^2 + \dots + (x-2007)^2.$$
3. Решите уравнение  $\sqrt{x^2 - 4} + \sqrt{x^2 + 2x - 8} = \sqrt{x^2 - 2x}$ .
4. Решите уравнение  $\log_2 \sin x + \log_{0,5} \cos x = \log_a \operatorname{tg} x$  с параметром  $a$ .
5. Решите неравенство  $|\arccos x| < \arcsin(|x+1|-1)$ .
6. Решите систему уравнений 
$$\begin{cases} \sin x = \cos y, \\ \cos x = y. \end{cases}$$
7. Расстояние между пунктами  $A$  и  $B$  равно 90 км. В 9:00 из пункта  $A$  в пункт  $B$  выходит автобус со скоростью 60 км/час. Начиная с 9:00 навстречу ему каждые 15 минут со скоростью 80 км/час выходят автобусы из пункта  $B$ . Автобус, вышедший из пункта  $A$ , пройдя 45 км, из-за поломки снижает скорость до 20 км/час и далее движется с этой скоростью. Пассажир, едущий в нем, размышляет, продолжать ли медленное движение в пункт  $B$  или вернуться обратно в пункт  $A$  первым попутным автобусом. Сколько времени есть у пассажира на принятие решения?
8. Изобразите множество точек плоскости  $xOy$ , координаты которых удовлетворяют неравенству  $9^x - y \leq 1 - 3^x y$ .
9. Пусть  $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ ,  $a \neq 0$ . Докажите, что корни уравнения  $f(x) = 0$  образуют арифметическую прогрессию тогда и только тогда, когда один из них является точкой перегиба функции  $f$ . [Для данной функции  $f$  точкой перегиба будет нуль ее второй производной].
10. В четырехугольной пирамиде, основанием которой является параллелограмм, проведено сечение, делящее три ее боковых ребра в отношении 1:1, 1:1 и 2:1, считая от вершины пирамиды. В каком отношении сечение делит четвертое боковое ребро пирамиды?

## РЕГИОНАЛЬНАЯ ОЛИМПИАДА ПО МАТЕМАТИКЕ

### 11 класс

### Вариант 2

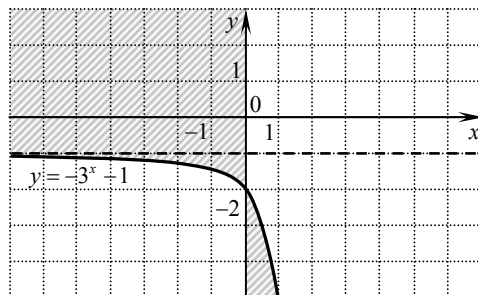
1. Сравните числа  $\int_{-1}^0 e^x dx$  и  $\int_0^1 3^x dx$ .
2. Найдите точку минимума функции
$$f(x) = (x+1)^2 + (x+2)^2 + (x+3)^2 + \dots + (x+2008)^2.$$
3. Решите уравнение  $\sqrt{x^2 - 4x} + \sqrt{x^2 - 2x - 8} = \sqrt{x^2 - 6x + 8}$ .
4. Решите уравнение  $\log_{0,25} \cos x + \log_4 \sin x = \log_a \operatorname{ctg} x$  с параметром  $a$ .
5. Решите неравенство  $|\arccos x| > \arcsin(1 - |x - 1|)$ .
6. Решите систему уравнений 
$$\begin{cases} \sin x = y, \\ \cos x = \cos y. \end{cases}$$
7. Расстояние между пунктами  $A$  и  $B$  равно 130 км. В 9:00 из пункта  $A$  в пункт  $B$  выходит автобус со скоростью 80 км/час. Начиная с 9:00 навстречу ему каждые 20 минут со скоростью 60 км/час выходят автобусы из пункта  $B$ . Автобус, вышедший из пункта  $A$ , через час после начала движения из-за поломки снижает скорость до 40 км/час и далее движется с этой скоростью. Пассажир, едущий в нем, размышляет, продолжать ли медленное движение в пункт  $B$  или вернуться обратно в пункт  $A$  первым попутным автобусом. Сколько времени есть у пассажира на принятие решения?
8. Изобразите множество точек плоскости  $xOy$ , координаты которых удовлетворяют неравенству  $0,25^x + y \geq 1 + 0,5^x y$ .
9. Пусть  $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ ,  $a \neq 0$ , и  $x_0$  — корень уравнения  $f''(x) = 0$ . Докажите, что если уравнение  $f(x) = 0$  имеет 3 различных корня, один из которых  $x_0$ , то полусумма двух других корней равна  $x_0$ .
10. В четырехугольной пирамиде, основанием которой является параллелограмм, проведено сечение, делящее три ее боковых ребра в отношении 1:2, 1:2 и 1:1, считая от вершины пирамиды. В каком отношении сечение делит четвертое боковое ребро пирамиды?

## РЕГИОНАЛЬНАЯ ОЛИМПИАДА ПО МАТЕМАТИКЕ

### 11 класс

#### Ответы к варианту 1

1. Левое число больше.
2.  $x_{\min} = 1004$ .
3.  $\{-2 - \frac{4\sqrt{3}}{3}; 2\}$ .
4. При  $a = 2$ :  $\bigcup_{k \in \mathbb{Z}} (2\pi k; \frac{\pi}{2} + 2\pi k)$ , при  $a \in (0; 1) \cup (1; 2) \cup (2; +\infty)$ :  $\{\frac{\pi}{4} + 2\pi k : k \in \mathbb{Z}\}$ ,  
при  $a \in (-\infty; 0) \cup \{1\}$ :  $\emptyset$ .
5.  $(\frac{\sqrt{2}}{2}; 1]$ .
6.  $\{(\frac{\pi}{2} + 2\pi k; 0) : k \in \mathbb{Z}\}$ .
7. 3 минуты.
8. См. рис.
9. Доказано.
10. 2:1 или 2:3.



## РЕГИОНАЛЬНАЯ ОЛИМПИАДА ПО МАТЕМАТИКЕ

### 11 класс

#### Ответы к варианту 2

1. Правое число больше.
2.  $x_{\min} = -1004,5$ .
3.  $\{-\frac{4\sqrt{3}}{3}; 2\}$ .
4. При  $a = 0,25$ :  $\bigcup_{k \in \mathbb{Z}} (2\pi k; \frac{\pi}{2} + 2\pi k)$ , при  $a \in (0; 0,25) \cup (0,25; 1) \cup (1; +\infty)$ :  $\{\frac{\pi}{4} + 2\pi k : k \in \mathbb{Z}\}$ ,  
при  $a \in (-\infty; 0) \cup \{1\}$ :  $\emptyset$ .
5.  $[-1; \frac{\sqrt{2}}{2})$ .
6.  $\{(2\pi k; 0) : k \in \mathbb{Z}\}$ .
7. 6 минут.
8. См. рис.
9. Доказано.
10. 1:1 или 1:3.

