

Санкт–Петербургский государственный университет
физический факультет
2008–2009 учебный год, январь

РЕГИОНАЛЬНАЯ ОЛИМПИАДА ПО МАТЕМАТИКЕ

11 класс

Вариант 1

1. Сравните числа $2^{20} + 3^{20} + 27 \cdot 6^9$ и 6^{11} .
2. Решите уравнение $\sqrt{|x| - |x-1|} - \sqrt{|x| + |x-1|} = \sqrt{x} - \sqrt{x}$.
3. Решите неравенство $\frac{2\log_2 x - \log_2(2x-1)}{\log_{0,2}(2x+1) - \log_{0,2} x} \geq 0$.
4. Решите уравнение $\cos(\sin(\operatorname{ctg} x)) = 1$.
5. Верно ли, что уравнение $\frac{\sin x}{x} = \frac{1}{2008}$ имеет 2009 корней?
6. Три целых числа образуют арифметическую прогрессию. Найдите их, если известно, что сумма этих чисел равна сумме их квадратов.
7. На отрезке прямой длиной 1 м расположено 2009 одинаковых шариков. В некий момент времени все они со скоростью 10 см/сек начинают двигаться по этому отрезку в произвольном направлении. Если они достигают края отрезка, то они падают, если встречаются друг с другом, то мгновенно начинают двигаться с той же скоростью в противоположном направлении. За какое минимальное время все шарики упадут вне зависимости от их начального положения?
8. При каких значениях параметра a уравнение $2^{\frac{1}{x^2-2x}} = a^2$ имеет решение на промежутке $(0; 2)$?
9. Докажите, что существует отличная от нуля функция $f(x)$, для которой
$$\int_0^{2009} f(x)dx = 2 \int_0^{2008} f(x)dx.$$
10. В усеченный конус, образующая которого равна 5, вписана сфера радиуса 2. Найдите площадь полной поверхности усеченного конуса. [Площадь дается формулой $S_{\text{п.п.}} = \pi(r_1^2 + l(r_1 + r_2) + r_2^2)$]

РЕГИОНАЛЬНАЯ ОЛИМПИАДА ПО МАТЕМАТИКЕ

11 класс

Вариант 2

1. Сравните числа $2^{16} + 3^{16} + 27 \cdot 6^7$ и 6^9 .
2. Решите уравнение $\sqrt{|x+1|-|x|} - \sqrt{|x+1|+|x|} = \sqrt{x} - \sqrt{x}$.
3. Решите неравенство $\frac{2\log_{0,3}(x+1) - \log_{0,3} 4x}{\log_3(2x+1) - \log_3 x} \geq 0$.
4. Решите уравнение $\sin(\cos(\operatorname{tg} x)) = 0$.
5. Верно ли, что уравнение $\frac{x^2}{\cos x} = 2008$ имеет 2009 корней?
6. Три целых числа образуют арифметическую прогрессию. Если сложить удвоенную сумму квадратов первого и последнего членов этой прогрессии с квадратом второго члена, получится сумма исходных чисел. Найдите их.
7. На отрезке прямой длиной 1 м расположено 2009 одинаковых шариков. В некий момент времени все они со скоростью 10 см/сек начинают двигаться по этому отрезку в произвольном направлении. Если они достигают правого края отрезка, то они падают, если левого края или если встречаются друг с другом, то мгновенно начинают двигаться с той же скоростью в противоположном направлении. За какое минимальное время все шарики упадут вне зависимости от их начального положения?
8. При каких значениях параметра a уравнение $3^{\frac{1}{x^2+2x}} = a^2$ имеет решение на промежутке $(-2; 0)$?
9. Докажите, что существует отличная от нуля функция $f(x)$, для которой
$$\int_0^{2009} f(x)dx = 4 \int_0^{2008} f(x)dx.$$
10. В усеченный конус, образующая которого равна 10, вписана сфера радиуса 3. Найдите площадь полной поверхности усеченного конуса. [Площадь дается формулой $S_{\text{п.п.}} = \pi(r_1^2 + l(r_1 + r_2) + r_2^2)$]