

«КЕНГУРУ» — ВЫПУСКНИКАМ, 2004 год
тест готовности к продолжению образования

I. Справедливо ли тождество?

- 1) $\left(\frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2} + \frac{2}{xy}\right) \cdot \frac{xy^2}{x+y} = 1 + \frac{x}{y}.$
- 2) $\frac{1}{(x-y)(y-z)} - \frac{1}{(y-z)(x-z)} - \frac{1}{(x-z)(x-y)} = 0.$
- 3) $\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{ctg} \alpha = \frac{1}{\sin 2\alpha}.$
- 4) $\left(\frac{3^x + 3^{-x}}{2}\right)^2 - \left(\frac{2^x + 2^{-x}}{2}\right)^2 = \left(\frac{3^x - 3^{-x}}{2}\right)^2 - \left(\frac{2^x - 2^{-x}}{2}\right)^2.$
- 5) $4^{\log_2 x} + 8^{\log_2 x} = (x+1) \cdot x^2.$

II. Верно ли числовое неравенство?

- 1) $\frac{\sqrt{5}-1}{2} < \frac{7}{12}.$
- 2) $\sin \frac{2\pi}{5} < \cos \frac{2\pi}{5}.$
- 3) $\lg 13 < \sin 13.$
- 4) $\sqrt{7} < 2^{\sqrt{3}}.$
- 5) $\sin^2 \frac{\pi}{8} < \sqrt{5} - 2.$

III. Верны ли следующие утверждения?

- 1) Положительное число, меньшее единицы, всегда больше своего квадрата.
- 2) Если $0 < a < b$ то $\lg^2 a < \lg^2 b.$
- 3) Если положительные числа $a_1, \dots, a_n$ образуют геометрическую прогрессию, то их логарифмы образуют арифметическую прогрессию.
- 4) Если на каждый вопрос теста можно ответить одним из трех способов — «Да», «Нет» или «Не знаю», то на пять вопросов теста может быть не более 200 разных комбинаций ответов.
- 5) Если $a > 0, b > 0$ и неравенство $a^x > b^x$ верно при каком-то отрицательном значении x , то оно верно и при любых отрицательных x .

IV. Верно ли, что уравнение имеет единственное решение?

- 1) $x^4 - 7x^2 - 1 = 0.$
- 2) $\sin^3 x = \cos x - 1.$
- 3) $3^x + 4^x = 5^x.$
- 4) $\lg^2 x = 2 \lg x + 5.$
- 5) $x - \cos x = 1.$

V. Верно ли, что неравенство справедливо при всех $x < -1$?

- 1) $(x+1)^2(2x+1) < 0$.
- 2) $\sqrt{x^2 - x - 1} > 1$.
- 3) $\lg x^2 > 0,01$.
- 4) $\cos \frac{1}{x} > \frac{1}{2}$.
- 5) $x + \sqrt{2 - x} > 0$.

VI. Верно ли, что для любого числа x можно найти такое число y , что выполнено следующее неравенство?

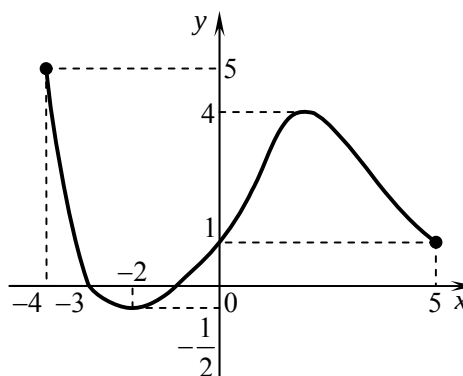
- 1) $\sin y > x$.
- 2) $y^2 < x - 10$.
- 3) $\log_2 y < x - 10$.
- 4) $(x - y)^3 > 1000$.
- 5) $\cos(x \cdot y) < \frac{1}{2}$.

VII. Верно ли, утверждение о линейной функции вида $y = kx + 1$?

- 1) Есть такое значение коэффициента k , при котором график этой функции проходит через точку с координатами $(1; 2)$.
- 2) Есть такое значение коэффициента k , при котором график этой функции проходит через точки с координатами $(2; 3)$ и $(-2; 3)$.
- 3) Корень этой функции положителен только при отрицательных значениях k .
- 4) Если $k > 1$, то корень этой функции больше, чем -1 .
- 5) Прямая, являющаяся графиком этой функции при $k = 2$, перпендикулярна прямой $x + 2y = 100$.

VIII. Верны ли следующие утверждения о функции $y = f(x)$, заданной графиком на отрезке $[-4; 5]$?

- 1) При всяком значении a , принадлежащем области значений функции, уравнение $f(x) = a$ имеет не менее двух корней.
- 2) Найдется такое значение a , при котором множеством решений неравенства $f(x) \leq a$ является промежуток длины $1,5$.
- 3) Найдется такое положительное значение a , при котором уравнение $f(x) = a$ имеет ровно два корня.
- 4) $f'(-1) = 0$.
- 5) Неравенство $f(f(x)) > 0$ верно при всех x из области определения функции $y = f(x)$.



IX. Верны ли следующие утверждения?

- 1) Вершина параболы $y = -x^2 - x - 1$ лежит во второй четверти.
- 2) Графики функций $y = \sqrt{x-2}$ и $y = \sqrt{2-x}$ симметричны друг другу относительно оси ординат.
- 3) График функции $y = 2^x - 2^{-x}$ симметричен относительно начала координат.
- 4) График функции $y = 2^x$ симметричен относительно прямой $x + y = 1$.
- 5) Можно найти такое значение k , чтобы графики функций $y = 2^{kx}$ и $y = \lg x$ были симметричны друг другу относительно прямой $y = x$.

X. Дан равнобедренный прямоугольный треугольник, длина гипотенузы которого равна 2. Справедливы ли следующие утверждения?

- 1) Длина медианы, проведенной из вершины прямого угла, равна 1.
- 2) Проекция катетов на гипотенузу равны.
- 3) Радиус окружности, вписанной в этот треугольник, больше 0,5.
- 4) Площадь этого треугольника больше трети площади описанного вокруг него круга.
- 5) Объемы тел, получаемых вращением этого треугольника вокруг гипотенузы и вокруг одного из катетов, равны.

XI. Существует ли треугольник ABC , удовлетворяющий следующим условиям?

- 1) $BC = 3$ см, $AC = 5$ см, $AB = 1$ см.
- 2) $\angle A = 60^\circ$, $\angle B = 41^\circ$, $\angle C = 80^\circ$.
- 3) $BC = 1$ м, $AC = 2$ м, $\angle A = 75^\circ$, $\angle B = 50^\circ$.
- 4) $AB = 1$ см, $AC = 2$ см, $BC = \sqrt{3}$ см, $\angle A = 60^\circ$.
- 5) Периметр треугольника ABC равен 1 см, а радиус описанной окружности равен 1 м.

XII. В кубе $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ с ребром 1 точка M — середина ребра AA_1 , N — середина CC_1 и P — середина $C_1 B_1$. Верны ли следующие утверждения?

- 1) Расстояние между точками M и N равно $\sqrt{2}$.
- 2) Найдутся две точки куба, расстояние между которыми равно 2.
- 3) Сечение, проходящее через точки M , N и P , — четырехугольник.
- 4) Площадь сечения, проходящего через точки D , M и N , равна $\frac{\sqrt{6}}{2}$.
- 5) Высота пирамиды $D_1 DCA$, опущенная из вершины D , равна $\frac{1}{3}$ диагонали куба DB_1 .

«КЕНГУРУ» — ВЫПУСКНИКАМ, 2004 год
тест готовности к продолжению образования

Ответы к тесту

- I.** 1) нет; 2) да; 3) нет; 4) да; 5) да.
- II.** 1) нет; 2) нет; 3) нет; 4) да; 5) да.
- III.** 1) да; 2) нет; 3) да; 4) нет; 5) да.
- IV.** 1) нет; 2) нет; 3) да; 4) нет; 5) да.
- V.** 1) да; 2) да; 3) нет; 4) да; 5) нет.
- VI.** 1) нет; 2) нет; 3) да; 4) да; 5) нет.
- VII.** 1) да; 2) нет; 3) да; 4) да; 5) да.
- VIII.** 1) нет; 2) да; 3) да; 4) нет; 5) да.
- IX.** 1) нет; 2) нет; 3) да; 4) нет; 5) да.
- X.** 1) да; 2) да; 3) нет; 4) нет; 5) да.
- XI.** 1) нет; 2) нет; 3) нет; 4) да; 5) да.
- XII.** 1) да; 2) нет; 3) нет; 4) нет; 5) да.