«КЕНГУРУ» — ВЫПУСКНИКАМ, 2005 год

тест готовности к продолжению образования

I. Справедливо ли тождество?

1) $(a^2+b^2)(x^2+y^2)-(ax+by)^2=(ay-bx)^2$.

2) $\sqrt[5]{x^3y\cdot\sqrt[4]{y^2x}}=\sqrt[20]{x^{11}}\cdot\sqrt[10]{y^3}$, где $x\geq 0$, $y\geq 0$.

3) $\left(a+\dfrac{ab}{a-b}\right)\left(\dfrac{ab}{a+b}-b\right):\dfrac{a^2+b^2}{a^2-b^2}=\dfrac{a^2b^2}{a^2+b^2}$.

4) $\cos 4\alpha-\sin 4\alpha\cdot\operatorname{ctg}2\alpha+1=0$.

5) $(\log_a c+\log_b c)\cdot\log_{ab} c=\log_a c\cdot\log_b c$.

II. Верно ли утверждение?

1) Число 133 — простое.
2) Пять разных монет можно разложить по четырем карманам более чем 1000 способами.
3) Пять одинаковых монет можно разложить по четырем карманам так, чтобы ни один карман не остался пустым, ровно пятью способами.
4) Цифры числа 18587442 можно представить так, что полученное число будет делиться на 9.
5) Число $\sqrt{0,4444\ldots}$ меньше, чем $\dfrac{5}{7}$.

III. Верно ли утверждение?

1) Если в четырехугольнике есть две пары равных сторон, то он — параллелограмм.
2) Если два угла — смежные, то их биссектрисы перпендикулярны.
3) Существует треугольник периметра 10, одна из сторон которого равна 6.
4) Если *O* — точка пересечения диагоналей трапеции *ABCD* с основанием *AD*, то площади треугольников *AOB* и *COD* равны.
5) Если хорды *AB* и *CD* некоторой окружности пересекаются в точке *M*, то $AM\cdot MB=CM\cdot MD$.

IV. В треугольнике *ABC* отрезок *CH* — высота, $AB=6$, $BC=5$, $CH=3$. Верно ли утверждение?

1) $\cos B=\dfrac{3}{5}$.
2) Высота, опущенная из вершины *A* больше 3,5.
3) $AC=\sqrt{13}$.
4) Угол *C* — тупой.
5) Радиус окружности, вписанной в треугольник *ABC*, меньше $\dfrac{3}{2}$.

V. Верно ли утверждение о последовательности, заданной формулой $a_n = 2^n$, $n = 1, 2, \dots$?

1) Последовательность $\frac{1}{a_n}$ является геометрической прогрессией.
2) Число 128 нельзя представить как произведение трех различных членов последовательности a_n.
3) $a_1 \cdot a_2 \cdot \ldots \cdot a_{100} = 2^{5050}$.
4) $\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \ldots + \frac{1}{a_{10000}} > 1$.
5) При всех n справедливо равенство $a_{n+2} = 5a_{n+1} - 6a_n$.

VI. Верно ли, что при некотором a данное уравнение имеет единственный корень?

1) $ax + 5 = 0$.
2) $|2x - 3| = a$.
3) $a \sin x = 1$.
4) $\lg x^2 = a$.
5) $\frac{1}{x} + \frac{1}{x - a} = 3$.

VII. Верно ли, что все корни данного уравнения содержатся среди чисел -2, -1, 0, 1?

1) $5 - 2x = 4x + 1$.
2) $\frac{x^2 - x - 2}{x - 2} = 0$.
3) $x^3 - 2x^2 - x + 2 = 0$.
4) $\cos^2 \pi x = 2 - 2x + x^2$.
5) $1 - x = \sqrt{2x - 2}$.

VIII. Верно ли утверждение?

1) Если $c < 0$, то уравнение $x^2 + 3x + c = 0$ имеет два действительных корня разных знаков.
2) При некотором c вершина параболы $y = x^2 + 3x + c$ лежит в четвертой четверти.
3) При некотором c неравенство $x^2 + 3x + c < 0$ верно при всех x.
4) При любом c параболы $y = x^2 + 3x + c$ и $y = x^2 - 3x + c$ симметричны друг другу относительно оси ординат.
5) Если $1 + b + c < 0$, то уравнение $x^2 + bx + c = 0$ имеет два действительных корня.

IX. Верно ли утверждение о функции $f(x) = x + \sin x$?

1) Функция $f(x)$ — четная.
2) Функция $f(x)$ — возрастающая.
3) График этой функции лежит в полосе $x - 1 \le y \le x + 1$.
4) Область значений функции $f(x)$ есть множество всех действительных чисел.
5) Уравнение $f(x) = 0{,}9x$ имеет бесконечно много решений.

X. Верно ли, что данная функция определена во всех точках отрезка $[2;\,6]$?

1) $y=\dfrac{x^2}{x^2-10}$.

2) $y=\sqrt{x-2}+\dfrac{1}{\sqrt{7-x}}$.

3) $y=\sqrt{\dfrac{x^3-9x^2+20x}{x+1}}$.

4) $y=\lg(28-3^{\frac{x}{2}})$.

5) $y=\dfrac{1}{|x-10|-|x|}$.

XI. Верно ли утверждение?

1) Число $\lg 100\pi$ — целое.

2) Число $\cos\dfrac{15\pi}{4}$ — рациональное.

3) Среднее арифметическое чисел $\sin 30°$, $\sin 31°$, $\sin 32°$ больше $\dfrac{1}{2}$.

4) Если $f'(1)<0$, то функция *f* не может быть возрастающей на отрезке $[0;\,2]$.

5) Наибольшее значение функции $y=\dfrac{x}{3x^2+4}$ не превосходит $\dfrac{1}{7}$.

XII. В правильной четырехугольной пирамиде *PABCD* с вершиной *P* каждое ребро равно 2. Верно ли утверждение?

1) Расстояние от вершины *C* до плоскости *BPD* больше 1.
2) Число пар скрещивающихся ребер этой пирамиды равно 12.
3) Расстояние от вершины *A* до прямой *PC* равно 2.
4) Угол между боковым ребром и плоскостью основания больше угла между боковой гранью и плоскостью основания.
5) Если *E* — точка на ребре *PC* и плоскость *BDE* делит объем пирамиды в отношении 1:5, то $EP=2CE$.

«КЕНГУРУ» — ВЫПУСКНИКАМ, 2005 год
тест готовности к продолжению образования

Ответы к тесту

I. 1) да; 2) нет; 3) нет; 4) да; 5) да.
II. 1) нет; 2) да; 3) нет; 4) нет; 5) да.
III. 1) нет; 2) да; 3) нет; 4) да; 5) да.
IV. 1) нет; 2) да; 3) да; 4) нет; 5) да.
V. 1) да; 2) нет; 3) да; 4) нет; 5) да.
VI. 1) да; 2) да; 3) нет; 4) нет; 5) да.
VII. 1) нет; 2) да; 3) нет; 4) да; 5) да.
VIII. 1) да; 2) нет; 3) нет; 4) да; 5) да.
IX. 1) нет; 2) да; 3) да; 4) да; 5) нет.
X. 1) нет; 2) да; 3) нет; 4) да; 5) нет.
XI. 1) нет; 2) нет; 3) да; 4) да; 5) нет.
XII. 1) да; 2) нет; 3) да; 4) нет; 5) да.