«КЕНГУРУ» — ВЫПУСКНИКАМ, 2007 год

тест готовности к продолжению образования

I. Верно ли равенство?

1. $\dfrac{2006}{2007}+\dfrac{2007}{2006}=2$.
2. $\sqrt{9-6\pi+\pi^2}+3=\pi$.
3. $\sin 2^\circ+\sin 182^\circ=1-\operatorname{tg}1^\circ\cdot\operatorname{tg}91^\circ$.
4. $12^{-\frac{1}{2}}+9^{-\frac{3}{4}}=\dfrac{5}{6}\cdot 3^{-\frac{1}{2}}$.
5. $3^{\log_2 5}=5^{\log_2 3}$.

II. Верно ли утверждение?

6. Среди чисел 21, 22, …, 40 ровно 20% простых.
7. Произведение любых двух трехзначных чисел является либо пятизначное, либо шестизначное число.
8. Разность квадратов некоторых двух натуральных чисел равняется 14.
9. Если с приходом в класс нового ученика средний рост учеников класса увеличился, то новчок — самый высокий в классе.
10. Если каждое слово языка племени Ыу начинается на **ыу,** оканчивается на **оя** и состоит из девяти букв **а, е, и, о, у, ы, э, ю, я,** по одному разу каждая, то в языке этого племени меньше 500 слов.

III. Верно ли, что равенство справедливо при всех допустимых значениях переменной?

11. $x^5+x-1=(x^2-x+1)(x^3+x^2-1)$.
12. $\dfrac{\sqrt{x}+\sqrt{y}}{x+\sqrt{xy}+y}\cdot(x\sqrt{x}-y\sqrt{y})=x-y$.
13. $\cos 2x=2\sin\left(x-\dfrac{\pi}{4}\right)\cdot\sin\left(x+\dfrac{\pi}{4}\right)$.
14. $\sqrt{9-x^2}\,(|3+x|+|3-x|-6)=0$.
15. $\operatorname{ch}(2x)=2\operatorname{ch}^2(x)-1$, где $\operatorname{ch}(x)=\dfrac{e^x+e^{-x}}{2}$ (функция $\operatorname{ch}(x)$ называется гиперболическим косинусом).

IV. Верно ли утверждение?

16. Для любых трех точек A, B, C справедливо векторное равенство $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CA}=\overrightarrow{CB}$.
17. Площади правильного треугольника и правильного шестиугольника, вписанных в одну и ту же окружность, относятся как $2:3$.
18. Если два угла четырехугольника равны по 100°, а остальные углы равны 75° и 85°, то вокруг этого четырехугольника можно описать окружность.

19. Треугольник на координатной плоскости с вершинами $A(0;2)$, $B(11;0)$ и $C(2;5)$ — прямоугольный.

20. Если треугольник ABC — равнобедренный, его основание AB равно 1, и AD — его медиана, то $AD > \frac{3}{4}$.

V. Верно ли, что число A положительно?

21. $A = (2\sqrt{2} - 3)(6 - \sqrt{35})$.

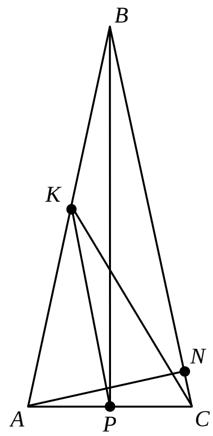
22. $A = \log_2(\sin 73°)$.

23. $A = \frac{2^{23}+1}{2^{25}+1} - \frac{2^{25}+1}{2^{27}+1}$.

24. $A = (\sqrt{10} - \pi)(e - 3)$.

25. $A = t^2 - 7t + 12$, где $t = \log_2 12$.

VI. В равнобедренном треугольнике ABC с углом $\angle B = 30°$ при вершине и боковой стороной 2 проведены высоты AN и BP. Точка K — середина стороны AB. Верно ли утверждение?



26. Площадь треугольника APK равна $\frac{1}{2}$.

27. $\angle NAP = 15°$.

28. Окружность, описанная вокруг треугольника ABN, проходит через точку P.

29. $AC = 2\sqrt{3 - \sqrt{3}}$.

30. Треугольники NPK и PNC подобны друг другу.

VII. Верно ли, что функции f и g имеют одинаковые множества значений?

31. $f(x) = \operatorname{tg} x,\ g(x) = \lg x$.

32. $f(x) = \frac{1}{x},\ g(x) = \frac{1}{x-1}$.

33. $f(x) = -x^2 - 2x,\ g(x) = 1 - |x - 1|$.

34. $f(x) = 10^x,\ g(x) = (x-1)^2$.

35. $f(x) = \cos x,\ g(x) = \sin\left(\frac{\pi}{2}\sin x\right)$.

VIII. Верны ли следующие утверждения про функцию $f(x) = \frac{x}{1+x^2}$?

36. График $f(x)$ симметричен относительно Oy.

37. Касательная к графику функции $f(x)$ в точке с абсциссой 2 параллельна прямой $3x + 25y = 0$.

38. Наибольшее значение функции $f(x)$ равно $\frac{1}{2}$.

39. Если $x > 100$, то $f(x) < \dfrac{1}{100}$.

40. Если параметр a увеличивается от 0 до 1, то прямая $y = 2f(a)x$ поворачивается вокруг начала координат на $45°$ против часовой стрелки.

IX. Верно ли, что при некотором значении параметра a данное неравенство справедливо при всех допустимых значениях x?

41. $x + a > \sin x$.

42. $x^2 + ax + 3 < 0$.

43. $\dfrac{x-2}{x} < a$.

44. $2^x \geq ax + 1$.

45. $\lg(x+10) > ax^2$.

X. Верно ли, что все корни данного уравнения лежат на отрезке $[-2; 2]$?

46. $x^2 - 3x - 4 = 0$.

47. $x^3 - 3x^2 - x + 3 = 0$.

48. $|2x| = 3 - x^2$.

49. $x + 2 = \sqrt{-x}$.

50. $2^x = 16 - x^4$.

XI. Верно ли утверждение?

51. Некоторая парабола вида $y = x^2 + q$ целиком лежит выше параболы $y = 2x^2$.

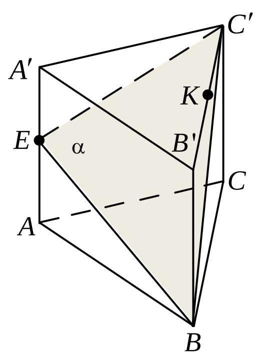
52. При любом значении параметра a система уравнений $\begin{cases} 2x + 3y = 5, \\ 6x + ay = 10 \end{cases}$ имеет единственное решение.

53. Логарифмические функции с разными основаниями пропорциональны друг другу.

54. Сумма коэффициентов многочлена $(2-x)^7$ равна 1.

55. Ни при каком значении a сумма корней уравнения $ax^2 + (a+2)x + 1 = 0$ не равна -1.

XII. $ABCA_1B_1C_1$ — прямая треугольная призма, все ребра которой равны 2, точка K — середина ребра B_1C_1, точка E — середина ребра AA_1. Пусть α — плоскость, проходящая через точки B, E и C_1. Верно ли утверждение?



56. Расстояние между прямыми BB_1 и AC больше, чем 1,5.

57. Если все ребра оснований этой призмы уменьшить в два раза, а боковые ребра увеличить в 3 раза, то объём призмы увеличиться.

58. Плоскость α перпендикулярна плоскости грани BCC_1B_1.

59. Плоскость α делит объём призмы в отношении $3:4$.

60. Линия пересечения плоскости α с плоскостью ABC параллельна прямой A_1K.