

«КЕНГУРУ» — ВЫПУСКНИКАМ, 2009 год
тест готовности к продолжению образования

I. Верно ли, что равенство справедливо при всех допустимых значениях переменных?

1. $(x+2)^2 \cdot (x-2)^2 = x^4 - 8x^2 + 16$.

2. $\frac{1-x^{-2}}{x^2-x^{-2}} = \frac{x+1}{\sqrt{x}}$.

3. $\lg(\lg x^y) = \lg y + \lg(\lg x)$.

4. $\frac{1}{\sin \alpha} + \frac{1}{\operatorname{tg} \alpha} = \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}$.

5. $\sqrt{25^{\frac{1}{\log_a 5}} + 49^{\frac{1}{\log_a 7}}} = a\sqrt{2}$.

II. Верно ли утверждение?

6. Наибольший общий делитель чисел 645 и 51 делится на 17.

7. Число $5 \cos \left(\arcsin \left(\frac{4}{5} \right) \right)$ — целое.

8. Если некоторая величина растет на 30% в год, то за три года она вырастет более чем в два раза.

9. Из шести букв слова **ЗАДАЧА** можно образовать ровно 12 различных двухбуквенных «слов».

10. Десятизначных чисел с произведением цифр 15 в два раза больше, чем десятизначных чисел с произведением цифр 25.

III. Верно ли, что данное уравнение имеет более одного действительного корня?

11. $\frac{x^2 - 3x + 2}{x - 2} = 0$.

12. $x^3 - x^2 - x + 1 = 0$.

13. $\sqrt{x-2} \cdot \sqrt{x^2-4x+3} = 0$.

14. $\log_2 x + \log_2 (x-3) = 2$.

15. $\sqrt{2x+13} = x+6$.

IV. Верно ли утверждение?

16. Если сумма квадратов двух сторон треугольника меньше квадрата третьей стороны, то этот треугольник — тупоугольный.

17. В треугольнике с углами 55° , 60° и 65° наименьшая высота опущена из угла 55° .

18. Если многоугольник с периметром 100 описан вокруг круга радиуса 1, то площадь этого многоугольника равна 50.

19. Если куб растянуть в прямоугольный параллелепипед, увеличив одно ребро вдвое, второе — втрое, третье — вчетверо, то поверхность тела увеличится в $\frac{26}{3}$ раз.

20. Плоскости, содержащие грани тетраэдра, разбивают пространство на 15 частей.

V. Верно ли числовое неравенство?

21. $(\sqrt{2} - 3) \cdot (\sqrt{3} - 2) > 0$.

22. $\log_2 \sqrt{15} > \log_4 18$.

23. $\cos 1^\circ + \cos 2^\circ + \cos 3^\circ + \dots + \cos 120^\circ > 0$.

24. $\lg 11 + \frac{1}{\sin 48^\circ} > 2$.

25. $\cos(1 + \sin 2) > \cos(1 + \sin 3)$.

VI. Верно ли утверждение про функцию $f(x) = \lg^2 x$?

26. $f\left(\frac{1}{10}\right) = 1$.

27. Областью определения функции является вся числовая ось без точки 0.

28. Каждое свое ненулевое значение функция f принимает два раза.

29. Если $x > 1$, то $f'(x) > 0$.

30. Каждая прямая вида $y = kx$ пересекает график $y = f(x)$ не более чем в двух точках.

VII. В треугольнике ABC отрезок BM — биссектриса, $BM = MC$, $AB = 2$, $\angle A = 30^\circ$. Верно ли утверждение?

31. $\angle MBC = 50^\circ$.

32. Треугольники ABC и ABM подобны.

33. Центр окружности, описанной вокруг треугольника ABC , лежит внутри этого треугольника.

34. Площадь треугольника ABC равна $2 \cos 50^\circ$.

35. $AC > \frac{4}{\sqrt{3}}$.

VIII. Верно ли, что множеством решений данного неравенства является некоторый отрезок $[a; b]$?

36. $x^2 - 5x + 6 \geq 0$.

37. $\sqrt{x+3} \leq 3-x$.

38. $(x^2 - 3x + 2) \cdot (x^2 - 5x + 6) \leq 0$.

39. $4^x + 2^x - 6 \leq 0$.

40. $\lg(1 - |x|) \leq -1$.

IX. Верно ли утверждение?

41. В арифметической прогрессии с четвертым членом 5 и шестым членом 9, имеется член равный 20.

42. В геометрической прогрессии с четвертым членом 5 и шестым членом 9 нет других членов, являющихся целыми числами.

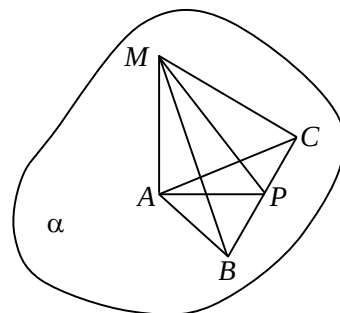
43. Если график функции $y = f(x)$ имеет ось симметрии $x = a$, то функция $g(x) = f(x + a)$ четна.
44. Если $f(x) = \sin x + \cos x$, то функция $y = 1 - f^2(x)$ нечетна.
45. Число 15π является периодом функции $y = \sin \frac{2x}{3} + \cos \frac{x}{5}$.

X. Верно ли утверждение?

46. Если $2x + 3 > 5$, то $3x + 4 > 6$.
47. Уравнение $\sin(\lg x + 5) = \frac{1}{2}$ имеет бесконечно много корней.
48. Уравнение $5x^8 - 7x^5 + 2 = 0$ имеет отрицательный корень.
49. Уравнение $(x - 1) \cdot (5x^8 - 7x^5 + 2) = 0$ имеет столько же различных корней, сколько и уравнение $5x^8 - 7x^5 + 2 = 0$.
50. Для любого корня уравнения $\operatorname{tg} \frac{x}{3} = 3$ справедливо неравенство $\sin x + \cos x < 0$.

XI. Из точки M на плоскости α опущен перпендикуляр MA и проведены две равные наклонные MB и MC . Точка P — середина отрезка BC . Угол $\angle PMA$ равен 30° , $MA = 2$. Верны ли утверждения?

51. Отрезки AM и BC перпендикулярны.
52. Площадь треугольника MBC вдвое больше, чем площадь треугольника ABC .
53. Справедливо векторное равенство $\overrightarrow{PA} = \frac{\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}}{2} - \overrightarrow{MA}$.
54. Объем пирамиды $MABC$ не может быть больше 1000.
55. Радиус шара, вписанного в пирамиду $ABCM$, меньше $\frac{3 - \sqrt{3}}{3}$.



XII. Верно ли утверждение?

56. Найдётся значение параметра a , при котором прямая $y = ax + 2$ пересекает ось Oy ниже, чем парабола $y = x^2 + 1$.
57. График функции $y = x^3 + 6x^2 + 12x + 3$ имеет ровно две горизонтальные касательные.
58. При некотором значении параметра a система уравнений $\begin{cases} |x| + |y| = 5, \\ y = 2|x| + a \end{cases}$ имеет ровно 3 решения.
59. Для всякого значения параметра a найдётся такое значение параметра b , что функция $y = \frac{x - a}{x - b}$ является возрастающей на отрезке $[1; 2]$.
60. Если ордината вершины параболы $y = x^2 + bx + c$ равна -5 , то между корнями уравнения $x^2 + bx + c = 0$ всегда расположено ровно 5 целых чисел.