

Санкт-Петербургский государственный университет, 1990
математико-механический факультет

РЕГИОНАЛЬНАЯ ОЛИМПИАДА ПО МАТЕМАТИКЕ

Вариант 1

1. а) Изобразите на координатной плоскости множество таких точек, координаты которых удовлетворяют неравенству $x^2y + xy^2 \leq 2xy$.
- б) Решите уравнение $\operatorname{tg} x = \cos x$.
- в) Покажите, не прибегая к помощи микрокалькулятора, что $2,25 < \log_2 5 < 2,5$.
- г) В трапеции $ABCD$ $AB = 15$ см, $AD = 5$ см. Найдите длины двух других сторон этой трапеции, если известно, что одна из диагоналей делит ее на два треугольника равной площади.
2. Дана функция $f(x) = \sqrt{4|x| - x^2}$.
- а) Решите уравнение $f(x) = -x - 2$.
- б) Решите неравенство $f(x) > x - 5$.
- в) Исследуйте, сколько корней в зависимости от значения действительного параметра a имеет уравнение $f(x) = a$.
3. Равнобедренный треугольник с углом φ при вершине вписан в равносторонний треугольник со стороной 2 так, что эта вершина совпадает с серединой стороны равностороннего треугольника.
- а) Найдите выражение для площади $S(\varphi)$ этого треугольника.
- б) Покажите, что $S(\varphi) = \frac{3 \sin \varphi}{8 \sin^2 \left(\frac{\varphi}{2} + \frac{\pi}{6} \right)}$.
- в) Докажите, что $S(\varphi) \leq \frac{\sqrt{3}}{4}$.
4. а) Найдите площадь подграфика функции $f(x) = \min \{ \sqrt{x}; 2 - x \}$, $x \in [0; 2]$.
- б) Покажите, что $\int_0^1 \sqrt{1 - x^2} dx = \frac{\pi}{4}$.
- в) Докажите, что для любых четырех чисел $a, b, p, q > 0$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, верно неравенство $\int_0^a x^{p-1} dx + \int_0^b x^{q-1} dx \geq ab$. В каком случае имеет место равенство?

РЕГИОНАЛЬНАЯ ОЛИМПИАДА ПО МАТЕМАТИКЕ

Вариант 2

1. а) Изобразите на координатной плоскости множество точек, координаты которых удовлетворяют неравенству $\sin(x+y) \cdot \sin(x-y) > 0$.

б) Решите уравнение $\log_2^2(-x) - 1 - \log_2 \frac{x}{2} = 0$.

в) На рисунке изображен график функции. Нарисуйте график производной этой функции и дайте необходимые пояснения.

г) Две вершины квадрата, расположенного в первом координатном угле, имеют координаты $(a; 0)$ и $(0; b)$. Найдите координаты двух других вершин и покажите, что центр квадрата лежит на биссектрисе этого координатного угла.

2. Дана функция $f(x) = \cos 2x + \sin x$.

а) Решите уравнение $f(x) = 1$.

б) Найдите число решений уравнения $f(x) = a$, лежащих на отрезке $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$, в зависимости от значения действительного параметра a .

в) Найдите множество значений функции f .

3. а) Покажите, что $\sqrt{x+y} \leq \sqrt{x} + \sqrt{y} \leq \sqrt{2(x+y)}$ при всех $x, y \geq 0$.

б) Единичный квадрат разделен двумя отрезками на четыре прямоугольника. Докажите, что произведение площадей двух не смежных прямоугольников не превосходит $\frac{1}{16}$.

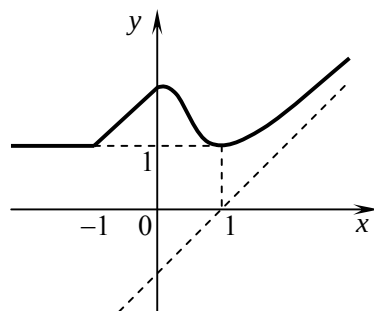
в) Найдите наибольшее значение произведения $x \cdot y$, если известно, что $x^2 + xy + y^2 \leq 1$.

4. Дана функция $f(x) = x^2$. Пусть $t \in [0; 1]$. Обозначим $S(t)$ сумму площадей двух криволинейных треугольников, ограниченных графиком функции f , вертикальными прямыми $x=0$, $x=1$ и горизонтальной прямой, проходящей через точку графика функции с абсциссой $x=t$.

а) Получите явную формулу для функции $S(t)$.

б) Найдите точку минимума функции S .

в) Выполните пункт б) в случае, если $f(x) = \ln(x+1)$.



РЕГИОНАЛЬНАЯ ОЛИМПИАДА ПО МАТЕМАТИКЕ

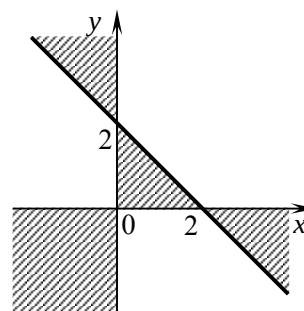
Ответы к варианту 1

1. а) см. рисунок; б) $\left\{(-1)^k \arcsin \frac{\sqrt{5}-1}{2} + \pi k : k \in \mathbb{Z}\right\}$; г) $BC = 5$ см,

$CD = 15$ см. 2. а) $\{-2 - \sqrt{2}\}$; б) $[-4; 4]$; в) если $a = 0$: 3 решения;
если $0 < a < 2$: 4 решения; если $a = 2$: 2 решения; в остальных

случаях решений нет. 3. а)-б) $S(\varphi) = \frac{3 \sin \varphi}{8 \sin^2 \left(\frac{\pi}{6} + \frac{\varphi}{2} \right)}$. 4. а) $\frac{7}{6}$;

в) $a = b^{q-1}$.



РЕГИОНАЛЬНАЯ ОЛИМПИАДА ПО МАТЕМАТИКЕ

Ответы к варианту 2

1. а) см. рисунок 1; б) $\{-2; -1\}$; в) см. рисунок 2; г) $C(b; a+b)$, $D(a+b; a)$.

2. а) $\left\{ \pi k; \frac{\pi}{6} + 2\pi k; \frac{5\pi}{6} + 2\pi k : k \in \mathbb{Z} \right\}$; б) если $a < 0$ и $a > \frac{9}{8}$: $\emptyset$; если $a \in [0; 1) \cup \left\{ \frac{9}{8} \right\}$: 1 решение;

если $a \in \left[1; \frac{9}{8} \right)$: 2 решения; в) $\left[-2; \frac{9}{8} \right]$. 3. в) $x \cdot y = \frac{1}{3}$ при $x = y = \frac{1}{\sqrt{3}}$. 4. а) $S(t) = \frac{4}{3}t^3 - t^2 + \frac{1}{3}$;

б) $S\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{4}$.

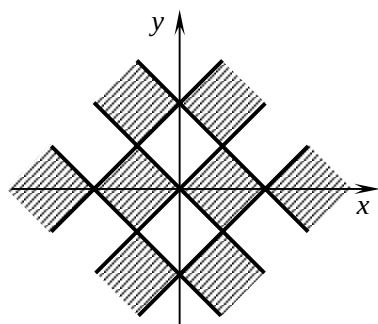


Рис. 1

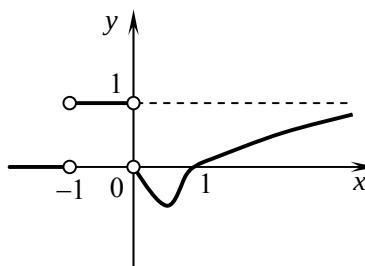


Рис. 2