Санкт-Петербургский государственный университет, 1991
математико-механический факультет

РЕГИОНАЛЬНАЯ ОЛИМПИАДА ПО МАТЕМАТИКЕ

Вариант 1

1. а) Решите уравнение $2^{2\lg x} + 2^3 = 6x^{\lg 2}$.

б) Изобразите на плоскости множество точек, координаты которых удовлетворяют неравенству $x + \frac{1}{y} \geq 0$.

в) Докажите, что функция $f(x) = \cos x^2$ непериодична.

г) Найдите все такие *a*, что при любом *b* уравнение $ax + b = |x|$ имеет решение.

2. Пусть $f(x) = \sin\frac{3x}{2} + \sin x$.

а) Решите уравнение $f(x) = \sin\frac{x}{2}$.

б) Найдите множество значений отношения $\dfrac{f(x)}{\sin\frac{x}{2}}$.

в) Определите число решений уравнения $f(x) = a\sin\frac{x}{2}$ на отрезке $[0; \pi]$.

3. Отображение *f* плоскости сопоставляет точке с координатами $(u; v)$ точку $(u+v; 2uv)$.

а) Найдите число прообразов точек $A(1; 2)$, $B(2; 2)$, $C(3; 2)$.

б) Найдите множество значений отображения *f*.

в) Докажите, что при всех действительных *c* образы прямых $u = c$ и $v = c$ совпадают и являются касательными фиксированной параболы.

4. Многочлены Чебышева первого рода определены формулой $T_n(x) = \cos(n \arccos x)$, при $x \in [-1; 1]$ и $n \geq 0$.

а) Докажите, что $T_{n+1}(x) = 2xT_n(x) - T_{n-1}(x)$.

б) Докажите, что $2^{1-n} \cdot T_n(x)$ — многочлен степени *n* с коэффициентом 1 при x^n.

в) Найдите $T_2(x)$ и докажите, что для любого квадратного трехчлена $P(x) = x^2 + ax + b$ выполняется неравенство $\max\limits_{[-1;\,1]} |P(x)| \geq \frac{1}{2}\max\limits_{[-1;\,1]} |T_2(x)|$.

Санкт-Петербургский государственный университет, 1991
математико-механический факультет

РЕГИОНАЛЬНАЯ ОЛИМПИАДА ПО МАТЕМАТИКЕ

Вариант 2

1. а) Решите уравнение $\cos x \cdot \sqrt{1+\operatorname{tg}^2 x} = -1$.

б) Найдите множество всех точек плоскости, являющихся серединами отрезков, концы которых лежат на кривой $y = x^3$.

в) Найдите все такие *a*, что функция $y = \lg(x + \sqrt{a^2 + x^2})$ нечетная.

г) Найдите все такие *b*, что при любом *a* уравнение $ax + b = |x|$ имеет решение.

2. Пусть $f(x) = \sqrt{x+1} - x$.

а) Решите неравенство $f(x) > -1$.

б) Найдите множество значений функции *f*.

в) Найдите число положительных решений уравнения $|f(x)| = a$.

3. Дан равнобедренный треугольник с углом α при вершине.

а) Докажите, что $\frac{r}{R} = \sin\alpha \cdot \operatorname{tg}\frac{\pi - \alpha}{4}$, где *r* и *R* — радиусы вписанной и описанной окружностей соответственно.

б) При каком значении α отношение $\frac{r}{R}$ принимает наибольшее значение?

в) Докажите, что в общем случае отношение $\frac{r}{R}$ принимает наибольшее значение для равносторонних треугольников.

4. а) Пусть $a \le b$, $x \le y$. Докажите, что $(a+b)(x+y) \le 2(ax+by)$.

б) Докажите неравенство Чебышева: если $a_1 \le a_2 \le \ldots \le a_n$, $b_1 \le b_2 \le \ldots \le b_n$, то $\sum_{i=1}^{n} a_i \cdot \sum_{i=1}^{n} b_i \le n\sum_{i=1}^{n} a_i b_i$.

в) Пусть функция *f* монотонно возрастает на $[0;1]$. Докажите, что $\int_0^1 f(x)dx \le 2\int_0^1 x \cdot f(x)dx$.

Санкт-Петербургский государственный университет, 1991
математико-механический факультет

РЕГИОНАЛЬНАЯ ОЛИМПИАДА ПО МАТЕМАТИКЕ

Ответы к варианту 1

1. а) $\{10; 100\}$; б) см. рисунок 1; г) $|a| > 1$. **2.** а) $\left\{2\pi k; -\dfrac{2\pi}{3} + 4\pi k; \dfrac{2\pi}{3} + 4\pi k : k \in \mathbb{Z}\right\}$; б) $\left[-\dfrac{5}{4}; 5\right)$; в) если $a \le -1$ и $a \ge 5$: 1 решение; если $-1 < a < 5$: 2 решения. **3.** а) 0, 1, 2; б) см. рисунок 2. **4.** в) $T_n = 2x^2 - 1$.

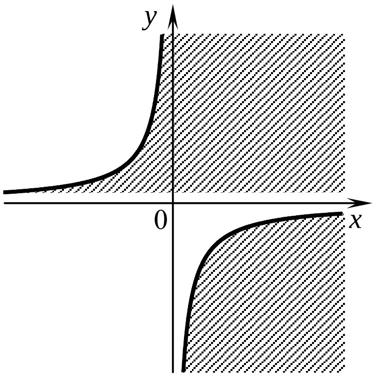


Рис. 1

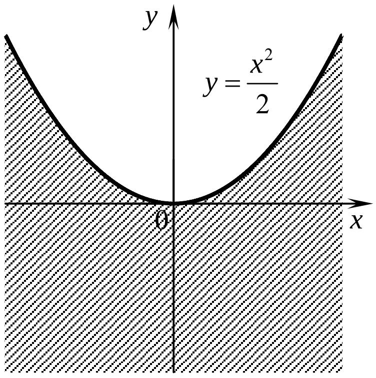
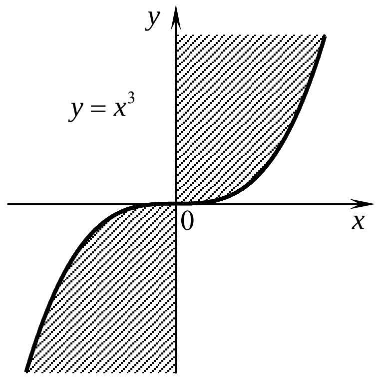


Рис. 2

Санкт-Петербургский государственный университет, 1991
математико-механический факультет

РЕГИОНАЛЬНАЯ ОЛИМПИАДА ПО МАТЕМАТИКЕ

Ответы к варианту 2



1. а) $\left\{\frac{\pi}{2}+2\pi k; \frac{3\pi}{2}+2\pi k : k \in \mathbb{Z}\right\}$; б) см. рисунок; в) $a = \pm 1$; г) $b \geq 0$.

2. а) $[-1; 3)$; б) $\left(-\infty; \frac{5}{4}\right]$; в) если $a = 0$ и $a \geq 1$: 1 решение; если $0 < a < 1$: 2 решения. **3.** б) $\alpha = \frac{\pi}{3}$.