Санкт-Петербургский государственный университет, 1992
математико-механический факультет

РЕГИОНАЛЬНАЯ ОЛИМПИАДА ПО МАТЕМАТИКЕ

Вариант 1

1. а) Докажите, что уравнение $ax^2+bx+c=0$ имеет два различных действительных корня, если $a(a+b+c)<0$. Верно ли обратное утверждение?

б) Решите уравнение $\sin^{19}\pi x+\cos^{92}\pi x=1$.

в) Изобразите на плоскости множество всех таких пар $(a;b)$ действительных чисел, что функция $y=a\sin x-bx$ монотонна на всей числовой прямой.

г) Абсциссы двух точек пересечения некоторой прямой с графиком функции $y=x^3-19x+92$ равны x_1, x_2. Найдите абсциссы остальных точек пересечения.

2. Решите неравенства: а) $\dfrac{x-2}{2\sqrt{x}-3}\le 1$, б) $\dfrac{\log_2 x-\log_x 4}{\log_x \dfrac{x^2}{8}}\le 2$.

в) Докажите, что уравнение $2\cos 2x=k(4\cos x-3)$ имеет решения при любых целых *k*.

3. а) Упростите произведение $p_n=\cos\dfrac{\alpha}{2}\cdot\cos\dfrac{\alpha}{4}\cdot\ldots\cdot\cos\dfrac{\alpha}{2^n}$.

б) Вычислите предел $\lim\limits_{n\to+\infty} p_n$.

в) Докажите формулу Виета $\dfrac{\pi}{2}=\dfrac{1}{\sqrt{\frac{1}{2}}\cdot\sqrt{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}}}\cdot\sqrt{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}}}}\cdots}$.

4. Положим $I(f)=\int\limits_a^b f(x)dx$.

а) Найдите такие числа *A* и *B*, что для всех линейных функций *f* верно, что $I(f)=(b-a)(Af(a)+Bf(b))$.

б) Существуют ли такие числа *A*, *B*, *C*, что для всех квадратичных функций *f* верно равенство $I(f)=(b-a)\left(Af(a)+Cf\left(\dfrac{a+b}{2}\right)+Bf(b)\right)$?

в) Найдите формулу, выражающую объем шарового сегмента через его высоту *h* и радиус *R* шара.

Санкт-Петербургский государственный университет, 1992
математико-механический факультет

РЕГИОНАЛЬНАЯ ОЛИМПИАДА ПО МАТЕМАТИКЕ

Вариант 2

1. а) Докажите, что уравнение $ax^2 + bx + c = 0$ имеет два различных действительных корня, если $a(a - b + c) < 0$. Верно ли обратное утверждение?

б) Решите уравнение $\sin\dfrac{1992\pi^2}{x} = \dfrac{1}{\cos x}$.

в) Изобразите на плоскости множество всех таких пар $(a; b)$ действительных чисел, что неравенство $|x - a| = |x - b| \le 2$ верно при всех $x \in [0; 1]$.

г) Существует ли прямая, пересекающая кривую $x^3 + y^3 = 1$ в трех различных точках?

2. Решите неравенства: а) $\dfrac{x+3}{\sqrt{x}+1} \ge 2\sqrt{x}$, б) $\dfrac{\log_2 x + \log_x 8}{\log_x 2x} \le 3$.

в) Найдите все такие целые *k*, что уравнение $5 - 2\cos 2x = k(2\sin x + 1)$ не имеет решений.

3. Даны многочлены $p_n(x) = x^n \sin\alpha - x\sin n\alpha + \sin(n-1)\alpha$ и $q(x) = x^2 - 2x\cos\alpha + 1$.

а) Докажите, что многочлен $p_4(x)$ делится на $q(x)$.

б) Найдите все α, отличные от $\pi k : k \in \mathbb{Z}$, при которых многочлен $p(x)$ имеет действительные корни.

в) Докажите, что при всех натуральных $n \ge 2$ многочлен $p_n(x)$ делится на $q(x)$.

4. Функция *f* задана, непрерывна и $f(x+1) = f(x)$ при всех $x \in \mathbb{R}$.

а) Докажите, что интеграл $\int\limits_t^{t+1} f(x)dx$ не зависит от *t*.

Предположим дополнительно, что функция *f* положительна. Пусть $F(\alpha) = \int\limits_0^1 \dfrac{f(x+\alpha)}{f(x)}dx$.

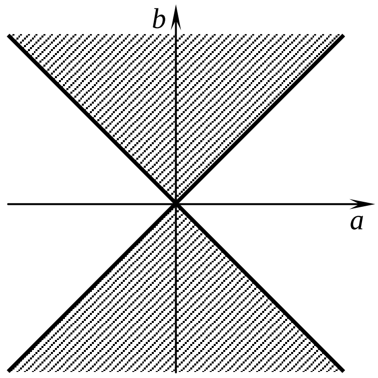
б) Докажите, что $F\left(\dfrac{1}{2}\right) \ge 1$.

в) Найдите все действительные α, при которых $F(\alpha) \ge 1$.

Санкт-Петербургский государственный университет, 1992
математико-механический факультет

РЕГИОНАЛЬНАЯ ОЛИМПИАДА ПО МАТЕМАТИКЕ

Ответы к варианту 1



1. б) $\left\{\dfrac{1}{2}+2k;\ k : k\in\mathbb{Z}\right\}$; в) см. рисунок; г) $-(x_1+x_2)$. **2.** а) $\left[0;\dfrac{9}{4}\right)$;

б) $(0;1)\cup(1;2\sqrt{2})\cup\{4\}$. **3.** а) $p_n=\dfrac{\sin\alpha}{2^n\sin\dfrac{\alpha}{2^n}}$; б) $\dfrac{\sin\alpha}{\alpha}$.

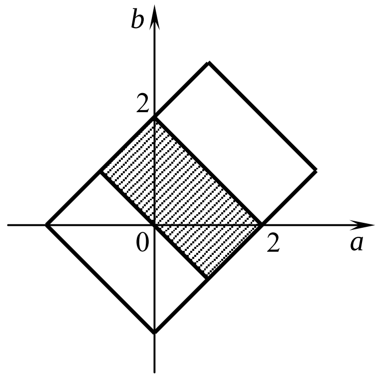
4. а) $A=B=\dfrac{1}{2}$; б) да, существуют; $A=B=\dfrac{1}{6}$, $C=\dfrac{2}{3}$;

в) $\dfrac{\pi h^2}{3}(3R-h)$.

Санкт-Петербургский государственный университет, 1992
математико-механический факультет

РЕГИОНАЛЬНАЯ ОЛИМПИАДА ПО МАТЕМАТИКЕ

Ответы к варианту 2



1. б) $\{16\pi;\ 3984\pi;\ -48\pi;\ -1328\pi\}$; в) см. рисунок; г) да, существует, например прямая, проходящая через точки с координатами $(1;\ 0)$ и $\left(\frac{1}{\sqrt[3]{2}};\ \frac{1}{\sqrt[3]{2}}\right)$. **2.** а) $[0;\ 1]$; б) $\left(0;\ \frac{1}{2}\right)\cup(1;\ 8]$; в) $-5,\ -4,\ \ldots,\ 1$. **3.** б) $\sin^2\alpha \ge \frac{2}{3}$. **4.** в) $\alpha \in \mathbb{R}$.