

Санкт-Петербургский государственный университет, 1993
математико-механический факультет

РЕГИОНАЛЬНАЯ ОЛИМПИАДА ПО МАТЕМАТИКЕ

1. а) Постройте эскиз графика функции $y = |\log_{4x^{-1}} 4x^2|$.
- б) Изобразите на плоскости множество точек $A(a; b)$, для которых при всех x верно неравенство $\sin(x + a) \geq \sin x + b$.
- в) Найдите наибольший радиус круга, лежащего в верхней полуплоскости, касающегося оси абсцисс в начале координат и не имеющего других общих точек с параболой $y = x^2$.
- г) Докажите, что $\int_0^n \frac{\sin x}{1+x^2} dx > 0$ при всех натуральных n .
2. а) Решите неравенство $2x \cdot 2^{\sqrt{3-x}} + 3 \cdot 2^{x-1} > x \cdot 2^x + 3 \cdot 2^{\sqrt{3-x}}$.
- б) Решите неравенство $\cos^2 x - \frac{2}{\cos x} \leq 2 - \cos x$.
- в) Докажите, что не существует прямых, касающихся графика функции $y = x^3 + 19x^2 + 9x + 3$ в двух различных точках.
3. В условиях этой задачи все числа — комплексные.
- а) Нарисуйте образ полуплоскости $\operatorname{Re} z \geq \frac{1}{2}$ при отображении, сопоставляющего числу z число z^{-1} .
- б) Докажите, что если $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = 0$, то треугольник с вершинами в точках a, b, c содержит начало координат.
- в) Докажите, что всякий корень уравнения $\frac{1}{z - c_1} + \frac{1}{z - c_2} + \frac{1}{z - c_3} = 0$ лежит в треугольнике с вершинами в точках c_1, c_2, c_3 .
4. а) Найдите число различных буквенных сочетаний, которые можно образовать, переставляя буквы в слове «аллах».
- б) Докажите тождество $\sum_{k=1}^{n+1} \frac{C_n^{k-1}}{k} = \frac{2^{n+1} - 1}{n+1}$.
- в) Имеются две монеты, одна из которых фальшивая: на обеих ее сторонах изображен герб. Случайным образом выбрали одну монету. Какова вероятность того, что монета фальшивая, если она лежит гербом вверх?

РЕГИОНАЛЬНАЯ ОЛИМПИАДА ПО МАТЕМАТИКЕ

Ответы к варианту

1. а) см. рисунок 1; б) $b \leq -2 \left| \sin \frac{a}{2} \right|$ (см. рисунок 2); в) $r = \frac{1}{2}$; г) $-(x_1 + x_2)$. 2. а) $\left(\frac{3}{2}; 2 \right)$;
б) $\left(-\frac{\pi}{2} + 2\pi k; \frac{\pi}{2} + 2\pi k \right) \cup \{ \pi + 2\pi k \} : k \in \mathbb{Z}$. 3. а) см. рисунок 3. 4. а) 30; в) $\frac{2}{3}$.

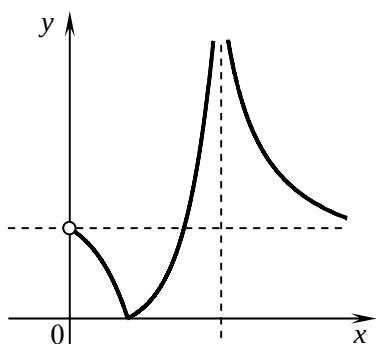


Рис. 1

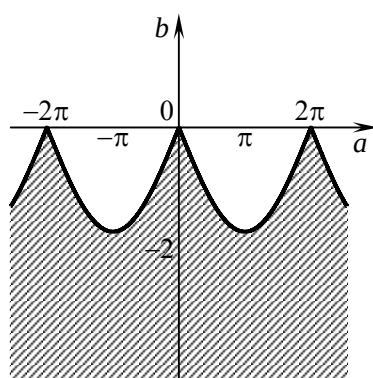


Рис. 2

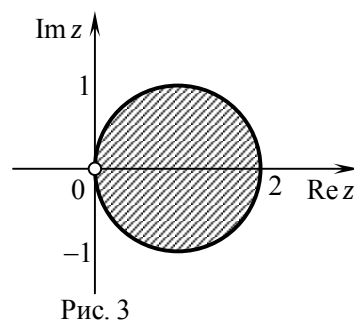


Рис. 3