

Санкт-Петербургский государственный университет, 1994
математико-механический факультет

РЕГИОНАЛЬНАЯ ОЛИМПИАДА ПО МАТЕМАТИКЕ

Вариант 1

1. а) Найдите все такие значения a и b , что система неравенств $\begin{cases} x + |y - a| \leq b, \\ y \geq 2|x - b| \end{cases}$ имеет единственное решение.
- б) Докажите, что кривая $x^4 + 1994x^3y - 6x^2y^2 - 1994xy^3 + y^4 = 0$ делит единичную окружность на восемь равных дуг.
- в) Докажите, что при любом натуральном k уравнение $x^2 - y^2 = k^{1993}$ разрешимо в целых числах.
2. а) Решите неравенство $x + \sqrt[3]{|3x + 1| - 1} \geq 0$.
- б) Найдите все решения уравнения $\cos 2x = a(\cos x - \sin x)$, лежащие в отрезке $[0; \pi]$.
- в) Решите уравнение $3^{2x} = 2^{2x} + 3^x + 2^x$.
3. а) Найдите уравнения тех касательных к графику функции $y = \ln x$, которые проходят через начало координат.
- б) При каких значениях a уравнение $\ln x = ax$ имеет решения?
- в) Сколько решений имеет уравнение $6^x = x^6$?
- г) Сколько рациональных решений имеет уравнение пункта в)?
4. а) Докажите, что число различных способов замощения полосы размером $2 \times n$ «доминошками» равно n -му числу Фибоначчи.
- б) Найдите формулу для суммы квадратов коэффициентов в разложении бинома $(x + 1)^n$.
- в) Шестеро учеников готовятся к ответу, сидя в один ряд на скамье за общим столом. Учитель может вызвать их в любом порядке. Какова вероятность того, что, выходя к доске, хотя бы один из них потревожит другого?

РЕГИОНАЛЬНАЯ ОЛИМПИАДА ПО МАТЕМАТИКЕ

Вариант 2

1. а) Сколько решений в зависимости от a имеет уравнение $|x-1| + |x-2| + \dots + |x-1994| = a$?
б) Докажите, что при любом натуральном n число $n^{1994} - 1994n + 1993$ делится на $(n-1)^2$.
в) Докажите неравенство $\frac{2 - \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2 + \dots}}}}{2 - \sqrt{2 + \sqrt{2 + \dots}}} > \frac{1}{4}$, где в числителе дроби 1994 квадратных корня, в знаменателе — 1993.
2. а) Решите неравенство $x \leq \sqrt[3]{|3x-1|-1}$.
б) Найдите все решения уравнения $\cos 2x + b(\cos x + \sin x) = 0$, лежащие в отрезке $[0; \pi]$.
в) Решите уравнение $5^{2x} = 3^{2x} + 2 \cdot 5^x + 2 \cdot 3^x$.
3. а) Найдите уравнения тех касательных к графику функции $y = e^x$, которые проходят через начало координат.
б) При каких значениях a уравнение $e^x = ax$ имеет решения?
в) Сколько решений имеет уравнение $10^x = x^{10}$?
г) Сколько рациональных решений имеет уравнение пункта в)?
4. а) Сколькими способами можно расположить на шахматной доске квадрат из целого числа ее клеток?
б) Сколько существует n -позиционных двоичных чисел, в которых нулей не меньше чем единиц?
в) Вася и Оля договорились о встрече между 17 и 18 часами. Вася будет ждать Олю в течение 30 минут после своего прихода, а Оля Васю — 10 минут. Какова вероятность их встречи, если каждый из них может подойти к назначенному месту в любой момент времени между 17 и 18 часами?

РЕГИОНАЛЬНАЯ ОЛИМПИАДА ПО МАТЕМАТИКЕ

Ответы к варианту 1

1. а) $a = 0$, b — любое. 2. а) $[0; +\infty) \cup \{-1\}$; б) если a — любое число: $\left\{\frac{\pi}{4}\right\}$; если $1 \leq a < \sqrt{2}$: $\left\{\frac{\pi}{4} \pm \arccos \frac{a}{\sqrt{2}}\right\}$; если $-1 \leq a < 1$: $\left\{\frac{\pi}{4} + \arccos \frac{a}{\sqrt{2}}\right\}$; в) $\{1\}$. 3. а) $y = \frac{x}{e}$; б) $\left(-\infty; \frac{1}{e}\right]$; в) 3 решения; г) одно рациональное решение: $x = 6$. 4. б) $\sum_{k=0}^n (C_n^k)^2 = C_{2n}^n$; в) $\frac{43}{45}$.

РЕГИОНАЛЬНАЯ ОЛИМПИАДА ПО МАТЕМАТИКЕ

Ответы к варианту 2

1. а) при $a > 997^2$: 2 решения; при $a = 997^2$: бесконечно много решений; при $a < 997^2$: решений нет. 2. а) $(-\infty; 0) \cup \{1\}$; б) если b — любое число: $\left\{\frac{3\pi}{4}\right\}$; если $1 \leq b < \sqrt{2}$: $\left\{\frac{3\pi}{4} \pm \arccos\left(-\frac{b}{\sqrt{2}}\right)\right\}$; если $-1 \leq b < 1$: $\left\{\frac{3\pi}{4} - \arccos\left(-\frac{b}{\sqrt{2}}\right)\right\}$; в) $\{1\}$. 3. а) $y = ex$; б) $(-\infty; 0) \cup [e; +\infty)$; в) 3 решения; г) одно рациональное решение: $x = 10$. 4. а) 204 способа; б) 2^{n-1} ; в) $\frac{19}{36}$.