Санкт-Петербургский государственный университет, 1995
математико-механический факультет

РЕГИОНАЛЬНАЯ ОЛИМПИАДА ПО МАТЕМАТИКЕ

Вариант 1

1. а) Найдите наименьшее положительное решение уравнения $\operatorname{tg}^2 2x + \operatorname{tg}^2 x = 10$.

б) Найдите число решений уравнения $1 + ax = \sqrt{x+3}$.

в) Докажите, что уравнение $8^x + 4^x + 2^x = 2x + 3$ имеет ровно два решения.

г) Найдите наибольшее по абсолютной величине значение выражения $(x-8)(x-14)(x-16)(x-22)$ при $x \in [8; 22]$.

2. Последовательности $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ и $\{c_n\}$ связаны соотношениями $a_{n+1} = \dfrac{b_n + c_n}{2}$, $b_{n+1} = \dfrac{c_n + a_n}{2}$ и $c_{n+1} = \dfrac{a_n + b_n}{2}$.

а) Найдите пределы этих последовательностей, если $a_1 = 0$, $b_1 = 1$ и $c_1 = 2$.

б) Пусть $\xi = \dfrac{a_1 + b_1 + c_1}{3}$. Докажите, что число ξ является общим пределом данных последовательностей.

в) Дан треугольник ABC с углами $\dfrac{\pi}{7}$, $\dfrac{2\pi}{7}$, $\dfrac{4\pi}{7}$; A_1, B_1, C_1 — точки пересечения биссектрис его углов с описанной около него окружностью; A_2, B_2, C_2 — точки пересечения биссектрис углов треугольника $A_1B_1C_1$ с этой же окружностью, и т. д. Вычислите углы треугольника $A_{40}B_{40}C_{40}$ с точностью до 0,01.

3. а) Докажите, что если число $x + x^{-1}$ целое, то при всех $n \in \mathbb{Z}$ число $x^n + x^{-n}$ также целое.

б) Докажите, что число $[(3+\sqrt{5})^n] + 1$ делятся на 2^n ($[\ldots]$ — целая часть числа).

в) Докажите, что если многочлен $x^n + 1$ делится на многочлен $x^k + 1$, то многочлен $x^{4n} + 1$ делится на $x^{4k} + 1$.

4. а) У Танъ-Янны имеются чашечные весы и набор разновесок в $1, 3, \ldots, 3^{1995}$ амма (по одной каждого веса). Докажите, что ей не удастся разложить их по чашкам весов так, чтобы весы были в равновесии.

б) Вычислите интеграл $\displaystyle\int_0^{2\pi} \cos x \cdot \cos 3x \cdot \ldots \cdot \cos 3^{1995} x dx$.

в) Палку случайным образом сломали в двух местах. Найдите вероятность того, что длина каждого из кусков не превосходит половины ее длины.

Санкт-Петербургский государственный университет, 1995
математико-механический факультет

РЕГИОНАЛЬНАЯ ОЛИМПИАДА ПО МАТЕМАТИКЕ

Вариант 2

1. а) Найдите наименьшее положительной решение уравнения $\mathrm{tg}^2 2x + \mathrm{ctg}^2 x = 10$.

б) Найдите число решений уравнения $2 + ax = \sqrt{5-x}$.

в) Докажите, что выражение $\dfrac{(x-a)(x-b)}{(x-c)(x-d)}$ принимает любое действительное значение тогда и только тогда, когда только одно из чисел *a*, *b*, лежит между *c* и *d*.

2. Последовательности $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ связаны соотношениями $a_{n+1} = \dfrac{b_n}{2}$ и $b_{n+1} = \dfrac{1+a_n}{2}$.

а) Пусть $a_1 = 0$, $b_1 = 1$. Положим $\Delta_n = \sqrt{\left(a_n - \frac{1}{3}\right)^2 + \left(b_n - \frac{2}{3}\right)^2}$. Докажите, что числа Δ_n образуют геометрическую прогрессию.

б) Докажите, что пределы $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$, $\lim\limits_{n\to\infty} b_n$ существуют и не зависят от выбора a_1 и b_1.

в) Лучи l_1 и m_1 лежат в первом координатном угле, причем луч l_1 образует угол $\dfrac{\pi}{5}$ с осью абсцисс, а m_1 — угол $\dfrac{\pi}{7}$ с осью ординат. Луч l_n является биссектрисой угла между осью абсцисс и лучом m_{n-1}, а m_n — биссектрисой угла между осью ординат и l_{n-1}. Вычислите с точностью до 0,01 угол между лучом l_{40} и осью абсцисс.

3. а) Известно, что $x + y = 2$, $x^3 + y^3 = 5$. Найдите $x^5 + y^5$.

б) Докажите, что если многочлен $x^n - 1$ делится на многочлен $x^k - 1$, то многочлен $x^{4n-1} - 1$ делится на $x^{4k-1} - 1$.

в) Докажите, что многочлен $(x^n - 1)\cdot(x^{n+1} - 1)\cdot\ldots\cdot(x^{n+k-1} - 1)$ делится на многочлен $(x-1)\cdot(x^2-1)\cdot\ldots\cdot(x^k - 1)$.

4. а) У Янатты имеются чашечные весы и набор разновесок в $1, 5, \ldots, 5^{1995}$ аппа (по одной каждого веса). Докажите, что ей не удается разложить их по чашкам весов так, чтобы весы были в равновесии.

б) Вычислите интеграл $\int\limits_0^{2\pi} \sin x \cdot \sin 5x \cdot \ldots \cdot \sin 5^{1995} x dx$.

в) Палку случайным образом сломали в двух местах. Найдите вероятность того, что из образовавшихся кусков можно составить треугольник.

Санкт-Петербургский государственный университет, 1995
математико-механический факультет

РЕГИОНАЛЬНАЯ ОЛИМПИАДА ПО МАТЕМАТИКЕ

Ответы к варианту 1

1. а) $\{\operatorname{arctg}\sqrt{5-2\sqrt{5}}\}$; б) если $0 < a \le \frac{1}{3}$: 2 решения; если $a \le 0$ и $a > \frac{1}{3}$: 1 решение; г) 576. **2.** а) 1; в) $\frac{\pi}{3}$, или 1,05. **4.** б) 0; в) $\frac{1}{4}$.

Санкт-Петербургский государственный университет, 1995
математико-механический факультет

РЕГИОНАЛЬНАЯ ОЛИМПИАДА ПО МАТЕМАТИКЕ

Ответы к варианту 2

1. а) $\left\{\operatorname{arctg}\sqrt{\frac{5-2\sqrt{5}}{5}}\right\}$; б) если $-\frac{2}{5}\le a<0$: 2 решения; если $a\ge 0$ и $a<-\frac{2}{5}$: 1 решение; г) 576.

3. а) 14,5. **4.** б) 0; в) $\frac{1}{4}$.