

Санкт-Петербургский государственный университет, 1996
математико-механический факультет

РЕГИОНАЛЬНАЯ ОЛИМПИАДА ПО МАТЕМАТИКЕ

Вариант 1

1. а) Сколько корней (в зависимости от a) имеет уравнение $x^{11} - ax + 1 = 0$?
б) Пусть $s = a_1 + a_2 + \dots + a_n$ ($a_i \geq -1$). Докажите неравенство $(a_1 + 1) \cdot (a_2 + 1) \cdot \dots \cdot (a_n + 1) \leq e^s$.
в) Пусть A, B, C — величины углов некоторого остроугольного треугольника. Докажите, что если $\operatorname{tg}(A - B) + \operatorname{tg}(B - C) + \operatorname{tg}(C - A) = 0$, то этот треугольник — равнобедренный.
г) Пусть $f(x) = \int_0^x \sin^{1995} t dt$. Решите уравнение $f(x) = 0$.
2. а) Решите неравенство $d \log_2 x + |\log_{2x} 2| \geq \frac{3}{2}$.
б) Верно ли, что при всех $k \in \{1; 2; \dots; 6\}$ справедливо неравенство $\cos^2 k + \cos^2 2k + \cos^2 3k \geq 1$?
в) Изобразите на координатной плоскости множество всех точек $A(a; b)$, таких что уравнение $\sqrt{x^2 - 1} = ax + b$, $b > 0$ имеет решение.
3. Про последовательность $\{x_n\}$ известно, что $x_1 = 1$ и если $x_n = \frac{p}{q}$, то $x_{n+1} = \frac{p+2q}{p+q}$.
а) Докажите, что каждая из дробей, появляющихся при определении членов этой последовательности, несократима.
б) Докажите, что последовательность $a_n = |x_n^2 - 2|$ монотонна.
в) Вычислите предел $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n$.
4. Про последовательность $\{q_n\}$ известно, что $q_1 = 1$, $q_i \in \mathbb{N}$ и $q_{n+1} \leq q_1 + \dots + q_n + 1$.
а) Докажите, что любое натуральное число представимо в виде суммы различных (возможно, одного) членов этой последовательности.
б) Докажите, что если последовательность q_n такова, что всякое натуральное число представляется в виде суммы некоторых членов последовательности $\{q_n\}$ единственным образом, то $(1 + x^{q_1})(1 + x^{q_2}) \dots (1 + x^{q_n}) = 1 + x + x^2 + \dots + x^N$.
в) Найдите все последовательности, для которых имеет место тождество из предыдущего пункта.

РЕГИОНАЛЬНАЯ ОЛИМПИАДА ПО МАТЕМАТИКЕ

Вариант 2

1. а) Сколько корней (в зависимости от a) имеет уравнение $ax^{13} + x - 1 = 0$?
- б) Пусть $p = b_1 \cdot b_2 \cdot \dots \cdot b_n$, $b_i > 0$. Докажите неравенство $b_1 + b_2 + \dots + b_n \geq n + \ln p$.
- в) Пусть A , B , C — величины углов некоторого треугольника. Докажите, что если $\sin(A - B) + \sin(B - C) + \sin(C - A) = 0$, то этот треугольник — равнобедренный.
- г) Пусть $g(x) = \int_0^x \cos^n t dt$. Найдите все $n \in \mathbb{N}$, при которых функция g периодична.
2. а) Решите неравенство $|\log_3 x| + \log_{3x} 3 \leq \frac{5}{2}$.
- б) Найдите все числа $k \in \{1; 2; \dots; 6\}$, для которых верно неравенство $\sin^2 k + \cos^2 2k + \sin^2 3k \geq 1$.
- в) Изобразите на координатной плоскости множество всех точек $A(a; b)$, таких что уравнение $\sqrt{x^2 + 1} = ax + b$, $b < 0$ имеет решение.
3. Про последовательность $\{c_n\}$ известно, что $c_1 = c > 0$ и $c_{n+1} = \frac{2(\sqrt{c_n^2 + 4} - 2)}{c_n}$.
- а) Докажите, что последовательность $\{c_n\}$ монотонна и вычислите ее предел.
- б) Докажите, что если $c = 2$, то $\lim_{n \rightarrow +\infty} 2^n c_n = \pi$.
- в) Сколько рациональных чисел может содержать такая последовательность?
4. Пусть $A_0, A_1, \dots, A_4$ — вершины правильного пятиугольника, вписанного в единичную окружность с центром O .
- а) Докажите, что $\overrightarrow{OA_0} + \overrightarrow{OA_1} + \dots + \overrightarrow{OA_4} = 0$.
- б) Докажите, что $(|A_0 A_1| \cdot |A_0 A_2|)^2 = 5$.
- в) Докажите, что многочлен $x^{16} + x^{12} + x^8 + x^4 + 1$ делится на многочлен $x^4 + x^3 + x^2 + x + 1$.

Санкт-Петербургский государственный университет, 1996
математико-механический факультет

РЕГИОНАЛЬНАЯ ОЛИМПИАДА ПО МАТЕМАТИКЕ

Ответы к варианту 1

1. а) если $a < \frac{11\sqrt[11]{10}}{10}$: 1 решение; если $a = \frac{11\sqrt[11]{10}}{10}$: 2 решения; если $a > \frac{11\sqrt[11]{10}}{10}$: 3 решения;
г) $\{2\pi k : k \in \mathbb{Z}\}$. 2. а) $\left[2^{\frac{1-\sqrt{41}}{4}}; \frac{1}{2}\right) \cup \left(\frac{1}{2}; \frac{1}{\sqrt{2}}\right) \cup [2; +\infty)$; б) да, верно; в) $|a| < 1$ или $|a| \leq b$. 3. в) $\sqrt{2}$.
4. в) $q_k = 2^{k-1}$.

Санкт-Петербургский государственный университет, 1996
математико-механический факультет

РЕГИОНАЛЬНАЯ ОЛИМПИАДА ПО МАТЕМАТИКЕ

Ответы к варианту 2

1. а) если $a < -\frac{12^{12}}{13^{13}}$ или $a \geq 0$: 1 решение; если $a = -\frac{12^{12}}{13^{13}}$: 2 решения; если $-\frac{12^{12}}{13^{13}} < a < 0$: 3 решения; г) все нечетные n . 2. а) $\left[\frac{1}{27}; \frac{1}{3}\right) \cup \left[\frac{1}{\sqrt{3}}; 3^{\frac{3+\sqrt{33}}{4}}\right]$; б) $\{2; 3; 5; 6\}$; в) $|a| > 1$. 3. в) сколько угодно.