

Санкт-Петербургский государственный университет, 1997
математико-механический факультет

РЕГИОНАЛЬНАЯ ОЛИМПИАДА ПО МАТЕМАТИКЕ

Вариант 1

1. а) Решите уравнение $\sqrt{x+3-4\sqrt{x-1}} + \sqrt{x+8-6\sqrt{x-1}} = 1$.
б) Числа $p, q \in [0; 1]$ выбирается случайным образом. Найдите вероятность того, что многочлен $x^2 + px + q$ имеет действительные корни.
в) Докажите, что если не существует треугольника с длинами сторон a, b, c , то нет и треугольника со сторонами a^n, b^n, c^n (n — натуральное).
г) Докажите, что треугольник ABC является прямоугольным тогда и только тогда, когда $\cos^2 A + \cos^2 B + \cos^2 C = 1$.
2. а) Решите неравенство $\lg^2(x+1) \geq \lg(x+1) \cdot \lg(x-1) + 2\lg^2(x-1)$.
б) Решите уравнение $4\cos x \cdot \cos 2x \cdot \cos 4x = \cos 7x$.
в) Найдите все значения b , при которых система неравенств $\begin{cases} y \geq (x-b)^2, \\ x \geq (y-b)^2 \end{cases}$ имеет единственное решение.
3. Пусть $p(x) = a_0 + a_1x + \dots + a_nx^n$.
а) Докажите, что если $p(k) \in \mathbb{Q}$ при всех $k \in \mathbb{Z}$, то $a_i \in \mathbb{Q}$ при всех $i = 0, 1, \dots, n$.
б) Докажите, что из того, что $p(k) \in \mathbb{Z}$ при всех $k \in \mathbb{Z}$, не следует, что $a_i \in \mathbb{Z}$ при всех $i = 0, 1, \dots, n$.
в) Пусть $q_i(x) = \frac{x(x-1) \cdot \dots \cdot (x-i+1)}{i!}$, $q_0(x) = 1$. Докажите, что если $p(k) \in \mathbb{Z}$ при всех $k \in \mathbb{Z}$, то $p(x) = \sum b_i q_i(x)$, где $b_i \in \mathbb{Z}$ при всех $i = 0, 1, \dots, n$.
4. а) Какое из чисел больше: 2^{300} или 3^{200} ?
б) Представьте число 1997 в виде суммы нескольких натуральных слагаемых с максимально возможным произведением.
в) Докажите, что произведение нескольких положительных чисел, сумма которых равна 1997, не превосходит e^{800} .

РЕГИОНАЛЬНАЯ ОЛИМПИАДА ПО МАТЕМАТИКЕ

Вариант 2

1. а) Решите уравнение $\sqrt{x+2-2\sqrt{x+1}} + \sqrt{x+10-6\sqrt{x+1}} = 2$.
- б) Числа $p, q \in [-1; 1]$ выбираются случайным образом. Найдите вероятность того, что многочлен $px^2 + qx - 1$ имеет действительные корни.
- в) Докажите, что если a, b, c — длины сторон некоторого треугольника, то из отрезков длиной $\sqrt[n]{a}, \sqrt[n]{b}, \sqrt[n]{c}$ также можно составить треугольник.
- г) Дан треугольник ABC . Докажите, что если $\frac{\sin^2 A}{\sin^2 B} = \frac{\operatorname{tg} A}{\operatorname{tg} B}$, то он либо равнобедренный, либо прямоугольный.
2. а) Решите неравенство $\log_2^2 x + 3 \log_2 x \cdot \log_2 (x-2) + 2 \log_2^2 (x-2) \leq 0$.
- б) Решите уравнение $4 \sin x \cdot \cos 2x \cdot \cos 4x = \sin 7x$.
- в) Найдите все значения b , при которых система неравенств $\begin{cases} y + x^2 \leq b, \\ x + y^2 \leq a \end{cases}$ имеет единственное решение.
3. а) Решите уравнение $1 + x + \dots + x^{4k-2} = 2kx^{2k-1}$.
- б) Докажите, что если все ненулевые коэффициенты некоторого многочлена равны ± 1 , то все его корни по модулю меньше двух.
- в) Известно, что $a < b < c$, $a + b + c = 6$ и $ab + bc + ca = 9$. Докажите, что $0 < a < 1 < b < 3 < c < 4$.
4. а) Найдите все пары $(a; b)$ комплексных чисел, таких что $|a| = |b| = 1$ и $|a + b| = |ab + bc + ca|$.
- б) Докажите, что если $|a| = |b| = |c| = 1$, то $|a + b + c| = |ab + bc + ca|$.
- в) Докажите, что если $\begin{cases} \cos x + \cos y + \cos z = 0, \\ \sin x + \sin y + \sin z = 0, \end{cases}$ то $\sin 3x = \sin 3y = \sin 3z$.

Санкт-Петербургский государственный университет, 1997
математико-механический факультет

РЕГИОНАЛЬНАЯ ОЛИМПИАДА ПО МАТЕМАТИКЕ

Ответы к варианту 1

1. а) $[5; 10]$; б) $\frac{1}{12}$. 2. а) $[\sqrt{2}; 3]$; б) $\left\{ \frac{\pi}{6} + \frac{\pi k}{3}; \pm \frac{\pi}{3} + \pi k : k \in \mathbb{Z} \right\}$; в) $b = -\frac{1}{4}$. 4. а) 3^{200} ; б) число 1997

есть сумма одной двойки и 665 троек, таким образом, максимальное значение произведения равно $2 \cdot 3^{665}$.

Санкт-Петербургский государственный университет, 1997
математико-механический факультет

РЕГИОНАЛЬНАЯ ОЛИМПИАДА ПО МАТЕМАТИКЕ

Ответы к варианту 2

1. а) $[0; 8]$; б) $\frac{13}{24}$. 2. а) $(2; 1 + \sqrt{2}] \cup \left[\frac{3 + \sqrt{5}}{2}; 3 \right)$; б) $\left\{ \pi k; \pm \frac{\pi}{6} + \frac{\pi k}{2} : k \in \mathbb{Z} \right\}$; в) $b = -\frac{1}{4}$. 3. а) $\{1\}$.
4. а) $a = b\varepsilon$, где ε — кубический корень из 1.