Санкт-Петербургский государственный университет, 1998
математико-механический факультет

РЕГИОНАЛЬНАЯ ОЛИМПИАДА ПО МАТЕМАТИКЕ

Вариант 1

1. а) Докажите, что если каждая из диагоналей четырехугольника делит его на два равновеликих треугольника, то этот четырехугольник параллелограмм.

б) Найдите наибольшую площадь тени при ортогональной проекции на плоскость правильной треугольной пирамиды, у которой сторона основания равна единице, а плоские углы при вершине прямые.

в) Докажите, что если $p_1 \cdot p_2 = 2(q_1 + q_2)$, то, по крайней мере, один из квадратных трехчленов $x^2 + p_i x + q_i$ ($i = 1, 2$), имеет действительный корень.

2. а) Нарисуйте график функции $f(x) = 2x + |\log_2 x + 2x| - \log_2 x$.

б) Решите уравнение $\sqrt{2 - \cos 2x} = \sin x - \cos x$.

в) Решите неравенство $\sqrt{|1 - 2x|} \geq 1 + ax$.

г) Для того, чтобы обеспечить себя в старости, Джон открыл счет в банке и решил ежегодно вносить на него $2000 в год. Достаточно ли ему копить деньги 27 лет, чтобы в дальнейшем тратить по $20000 в год из процентов, не трогая накопленной суммы? Банк дает 10% годовых, а $\lg 1{,}1 = 0{,}0414$.

3. а) В прямоугольнике $ABCD$ $|AB| = 1$, $|BC| = 3$. Точки E и F делят сторону BC на три равные части. Докажите, что $\angle CAD + \angle EAD + \angle FAD = 90°$.

б) Изобразите на координатной плоскости множество точек, координаты $(x;\, y)$ которых удовлетворяют уравнению $\operatorname{arctg} x + \operatorname{arctg} y = 2\operatorname{arctg}\dfrac{x+y}{2}$.

в) Вычислите сумму $\operatorname{arctg} 1 + \operatorname{arctg}\dfrac{1}{3} + \ldots + \operatorname{arctg}\dfrac{1}{n^2+n+1} + \ldots$.

4. а) Найдите наибольший объем треугольной пирамиды, четыре ребра которой имеют длину единица, а два оставшихся равны друг другу.

б) Найдите наибольший объем треугольной пирамиды, четыре ребра которой имеют длину единица.

в) Сколько различных (то есть различимых по внешнему виду) каркасов треугольных пирамид можно составить из зеленых стержней длиной по 33 см каждый и красных стержней длиной по 20 см.

Санкт-Петербургский государственный университет, 1998
математико-механический факультет

РЕГИОНАЛЬНАЯ ОЛИМПИАДА ПО МАТЕМАТИКЕ

Вариант 2

1. а) Докажите, что если каждая из средних линий четырехугольника делит его на две равновеликие фигуры, то этот четырехугольник параллелограмм.

б) Найдите наибольшую площадь тени при ортогональной проекции на плоскость правильной треугольной пирамиды, у которой сторона основания равна единице, а боковое ребро — двум.

в) Докажите, что если $a_i > 0$, $a_i \cdot c_i \geq b_i^2$ ($i = 1, 2, 3$), то $(a_1 + a_2 + a_3)(c_1 + c_2 + c_3) \geq (b_1 + b_2 + b_3)^2$.

2. а) Нарисуйте график функции $f(x) = \log_3 x - 3x - |\log_3 x + 3x|$.

б) Решите уравнение $\sqrt{2 + \cos 2x} = \sin x + \cos x$.

в) Решите неравенство $\sqrt{\left| x - \frac{1}{4} \right|} \leq \frac{1}{2} + ax$.

г) Задумав жениться, Иван открыл счет в банке и решил ежегодно вносить на него 10000 рублей. Сколько денег на семейный отдых он сможет тратить через 8 лет, если будет брать только проценты с накопленной за это время суммы? Банк дает 30% годовых, а $\lg 1{,}3 = 0{,}114$.

3. а) Найдите все треугольники, длины сторон и величины углов которых образуют арифметические прогрессии.

б) Верно ли, что для всякой арифметической прогрессии из четырех положительных чисел существует выпуклый четырехугольник, длинами сторон которого являются эти числа?

в) Найдите все четырехугольники, длины сторон которых и углы которых (взятые в циклических порядках) образуют арифметические прогрессии.

4. а) Найдите все целые *k*, при которых разрешимо уравнение $\sqrt{\arcsin x} + \sqrt{\arccos x} = \sqrt{\frac{k}{10}}$.

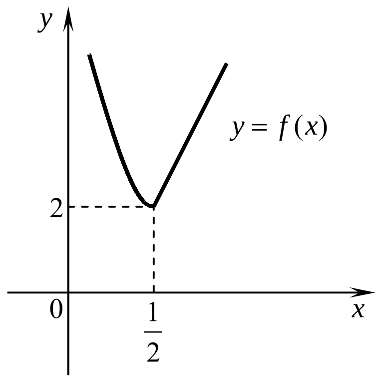
б) Найдите все целые решения уравнения $\sqrt{x} + \sqrt{y} = \sqrt{1998}$.

в) Найдите все натуральные решения уравнения $\sqrt{x} + \sqrt{y} + \sqrt{z} = \sqrt{1998}$.

Санкт-Петербургский государственный университет, 1998
математико-механический факультет

РЕГИОНАЛЬНАЯ ОЛИМПИАДА ПО МАТЕМАТИКЕ

Ответы к варианту 1



1. б) $\frac{\sqrt{3}}{4}$. **2.** а) см. рисунок; б) $\left\{\frac{3\pi}{4}+2\pi k;\ \pi+2\pi k : k\in\mathbb{Z}\right\}$; в) при $a>\sqrt{2}-1$: $(-\infty;0]$, при $0<a\le\sqrt{2}-1$: $(-\infty;0]\cup\left[\frac{1-a-\sqrt{1-2a-a^2}}{a^2};\frac{1-a+\sqrt{1-2a-a^2}}{a^2}\right]$, при $a=0$: $(-\infty;0]\cup[1;+\infty)$, при $-1\le a<0$: $\left[-\frac{2a+2}{a^2};0\right]\cup\left[\frac{1-a-\sqrt{1-2a-a^2}}{a^2};+\infty\right)$, при $-2\le a<-1$: $\left[0;-\frac{2a+2}{a^2}\right]\cup\left[\frac{1-a-\sqrt{1-2a-a^2}}{a^2};+\infty\right)$, при $a<-2$: $[0;+\infty)$; г) 90000 рублей. **3.** б) искомым множество является множество, заданное уравнением $x^2=y^2$; в) $\frac{\pi}{2}$. **4.** а)-б) $\frac{\sqrt{3}}{12}$; в) 9 пирамид.

Санкт-Петербургский государственный университет, 1998
математико-механический факультет

РЕГИОНАЛЬНАЯ ОЛИМПИАДА ПО МАТЕМАТИКЕ

Ответы к варианту 2

1. б) 1. **2.** б) $\left\{\frac{\pi}{4}+2\pi k;\ \frac{\pi}{2}+2\pi k : k\in\mathbb{Z}\right\}$; в) при $a>\sqrt{2}-1$: $[0;+\infty)$, при $0<a\le\sqrt{2}-1$: $\left[0;\ \frac{1-a-\sqrt{1-2a-a^2}}{2a^2}\right]\cup\left[\frac{1-a+\sqrt{1-2a-a^2}}{2a^2};+\infty\right)$, при $a=0$: $[0;1]$, при $-1\le a<0$: $\left(-\infty;-\frac{a+1}{a^2}\right]\cup\left[0;\ \frac{1-a-\sqrt{1-2a-a^2}}{2a^2}\right]$, при $-2\le a<-1$: $(-\infty;0]\cup\left[-\frac{a+1}{a^2};\ \frac{1-a-\sqrt{1-2a-a^2}}{2a^2}\right]$, при $a<-2$: $(-\infty;0]$; г) да, достаточно. **3.** б) только равносторонние треугольники; в) квадраты и только они. **4.** а) $k=16, 17, \ldots, 31$; б) $\{(1998;0);(0;1998);(888;222);(222;888)\}$; в) $\{(222;222;222)\}$.