Санкт-Петербургский государственный университет, 2000
математико-механический факультет

РЕГИОНАЛЬНАЯ ОЛИМПИАДА ПО МАТЕМАТИКЕ

Вариант 1

1. а) Существует ли геометрическая прогрессия, среди членов которой имеются числа 2, 3 и 5?

б) Решите уравнение $[2\cos 3x] = 2\sin 2x$ (здесь $[\ldots]$ — это целая часть числа, т.е. наибольшее целое число, его не превосходящее).

в) Найдите количество лежащих на кривой $x^2 - y^2 = 2000$ точек плоскости, координаты которых суть целые числа.

г) Два шахматиста играют матч до первой победы. Известно, что во встречах друг с другом каждый из них, играя белыми фигурами, побеждает с вероятностью 0,5, а проигрывает с вероятностью 0,25 (тем самым с вероятностью 0,25 в каждой из партий фиксируется ничья). Если в 40 партиях матча будет зафиксирована ничья, то для определения победителя бросают жребий. Оцените (с разумной точностью) шансы на выигрыш того игрока, с которого начнется этот матч.

2. а) Решите неравенство $x^2 + \dfrac{4x^2}{(x+2)^2} \geq 5$.

б) Решите уравнение $\sqrt{a + 2\cos 2x} = a\cos x$.

в) Внутри угла величиной 60° с вершиной в точке A на расстоянии 4 от нее расположена точка M. Найдите расстояние между основаниями перпендикуляров, опущенных из точки M на стороны этого угла.

г) Сколько сторон имеет сечение куба $ABCDA'B'C'D'$ плоскостью, проходящей через точки $K \in [A'D']$, $L \in [B'C']$ и $M \in [BB']$, которые делят эти отрезки в, соответственно, отношениях 16:9, 2:3 и 1:2 (считая от вершины, указанной первой)?

3. Последовательность $\{x_n\}$, начальный член которой x_0 — натуральное число, задана соотношениями $x_{n+1} = \begin{cases} \dfrac{x_n}{2}, & \text{если число } x_n \text{ четно,} \\ x_n + 9, & \text{если оно нечетно.} \end{cases}$

а) Найдите все периодические последовательности данного вида.

б) Докажите, что всякая последовательность данного вида имеет периодический «хвост», т.е. для нее найдутся такие натуральные числа N и t, что $x_{n+t} = x_n$ для всякого натурального $n \geq N$.

Санкт-Петербургский государственный университет, 2000
математико-механический факультет

РЕГИОНАЛЬНАЯ ОЛИМПИАДА ПО МАТЕМАТИКЕ

Вариант 2

1. а) Существует ли геометрическая прогрессия, среди членов которой имеются числа 3, 7 и 10?

б) Решите уравнение $[2\sin 3x] = -2\sin 2x$ (здесь $[\ldots]$ — это целая часть числа, т.е. наибольшее целое число, его не превосходящее).

в) Найдите количество лежащих на кривой $x^2 - y^2 = 1944$ точек плоскости, координаты которых суть целые числа.

г) Два шахматиста играют матч до первой победы. Известно, что во встречах друг с другом каждый из них, играя белыми фигурами, побеждает с вероятностью 0,5, а проигрывает с вероятностью 0,125 (тем самым с вероятностью 0,375 в каждой из партий фиксируется ничья). Если в 80 партиях матча будет зафиксирована ничья, то для определения победителя бросают жребий. Оцените (с разумной точностью) шансы на выигрыш того игрока, с которого начнется этот матч.

2. а) Решите неравенство $\dfrac{4}{(x-1)^2} \ge \dfrac{5}{x^2} - 4$.

б) Решите уравнение $\sqrt{a - 2\cos 2x} = a\sin x$.

в) Внутри угла величиной $120°$ с вершиной в точке A на расстоянии 4 друг от друга лежат точки K и L. Пусть M — точка пересечения восстановленных в точках K и L перпендикуляров к соответствующим сторонам угла. Найдите расстояние от M до A.

г) Сколько сторон имеет сечение куба $ABCDA'B'C'D'$ плоскостью, проходящей через точки $K \in [AB]$, $L \in [A'B']$ и $M \in [C'D']$, которые делят эти отрезки в, соответственно, отношениях 1:4, 11:4 и 8:7 (считая от вершины, указанной первой).

3. Последовательность $\{x_n\}$, начальный член которой x_0 — натуральное число, задана соотношениями $x_{n+1} = \begin{cases} \dfrac{x_n}{2}, \text{ если число } x_n \text{ четно,} \\ x_n + 7, \text{ если оно нечетно.} \end{cases}$

а) Найдите все периодические последовательности данного вида.

б) Докажите, что всякая последовательность данного вида имеет периодический «хвост», т.е. для нее найдутся такие натуральные числа N и t, что $x_{n+t} = x_n$ для всякого натурального $n \ge N$.

Санкт-Петербургский государственный университет, 2000
математико-механический факультет

РЕГИОНАЛЬНАЯ ОЛИМПИАДА ПО МАТЕМАТИКЕ

Ответы к варианту 1

1. а) нет, не существует; б) $\left\{\frac{\pi}{2}+\pi k;\ -\frac{\pi}{4}+2\pi k;\ \frac{\pi}{12}+2\pi k;\ -\frac{7\pi}{12}+2\pi k : k\in\mathbb{Z}\right\}$; в) 24; г) шансы первого игрока 3:2, так как вероятность его победы почти равна $\frac{3}{5}$. **2.** а) $(-\infty;-2)\cup(-2;-1]\cup[2;+\infty)$; б) при $a\in[-1;0)$: $\left\{\pm\arccos\left(-\frac{1}{\sqrt{a+2}}\right)+2\pi k : k\in\mathbb{Z}\right\}$, при $a=0$: $\left\{\frac{\pi}{4}+\frac{\pi k}{2} : k\in\mathbb{Z}\right\}$, при $a\in(0;2)\cup(2;+\infty)$: $\left\{\pm\arccos\frac{1}{\sqrt{a+2}}+2\pi k : k\in\mathbb{Z}\right\}$, при $a=2$: $\bigcup\limits_{k\in\mathbb{Z}}\left[-\frac{\pi}{2}+2\pi k;\ \frac{\pi}{2}+2\pi k\right]$; в) $2\sqrt{3}$; г) 5. **3.** а)-б) 14 последовательностей с начальными членами из множества $x_0=\{1, 2, \ldots, 9, 10, 12, \ldots, 18\}$.

Санкт-Петербургский государственный университет, 2000
математико-механический факультет

РЕГИОНАЛЬНАЯ ОЛИМПИАДА ПО МАТЕМАТИКЕ

Ответы к варианту 2

1. а) нет, не существует; б) $\left\{\pi k; -\frac{3\pi}{4}+2\pi k; -\frac{5\pi}{12}+2\pi k : k\in\mathbb{Z}\right\}$; в) 24; г) шансы первого игрока: 1,75, так как вероятность его победы почти равна $\frac{7}{11}$. **2.** а) $(-\infty; -1]\cup\left[\frac{1}{2}; 1\right)\cup(1; +\infty)$; б) при $a\in[-1; 0)$: $\left\{(-1)^k\arcsin\left(-\frac{1}{\sqrt{a+2}}\right)+\pi k : k\in\mathbb{Z}\right\}$, при $a=0$: $\left\{\frac{\pi}{4}+\frac{\pi k}{2} : k\in\mathbb{Z}\right\}$, при $a\in(0; 2)\cup(2; +\infty)$: $\left\{(-1)^k\arcsin\frac{1}{\sqrt{a+2}}+\pi k : k\in\mathbb{Z}\right\}$, при $a=2$: $\bigcup\limits_{k\in\mathbb{Z}}[-2\pi k; \pi+2\pi k]$; в) $\frac{8}{\sqrt{3}}$; г) 5. **3.** а) 11 последовательностей с начальными членами из множества $x_0=\{1, 2, \ldots, 7, 8, 9, 10, 12, 14\}$.