

Санкт-Петербургский государственный университет, 2001
математико-механический факультет

РЕГИОНАЛЬНАЯ ОЛИМПИАДА ПО МАТЕМАТИКЕ

Вариант 1

1. а) Сколько существует треугольников с целочисленными сторонами периметра 40?
б) Докажите, что уравнение $p(x) + p(x+1) + \dots + p(x+2000) = 0$ имеет решение, если известно, что разность корней квадратного трехчлена $p(x) \leq 2000$.
в) Точки A_1, B_1, C_1 лежат соответственно на сторонах BC, AC и AB треугольника площади S . Пусть S_1, S_2, S_3 — площади треугольников $AB_1C_1, BA_1C_1, CA_1B_1$. Докажите, что $\sqrt{S_1} + \sqrt{S_2} + \sqrt{S_3} \leq \frac{3}{2}\sqrt{S}$.
г) Найдите отношение объема треугольной пирамиды к объему пирамиды, вершинами которой являются точки пересечения медиан граней исходной пирамиды.
2. а) Решите систему
$$\begin{cases} |x+y| + |x-y| = 4, \\ y + \frac{1}{2} = |x-1|. \end{cases}$$

б) Изобразите на плоскости множество всех точек с координатами $(p; q)$, таких что уравнение $x^2 + pq + q = 0$ имеет хотя бы один корень на интервале $(-p; p)$.
в) Найдите все значения параметра a , при которых уравнение $\frac{a \cdot 9^{|x|} - 6^{|x|}}{6^{|x|} - 4^{|x|+1}} = 1$ имеет решение.
г) Какое наибольшее число решений может иметь система
$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 10, \\ x^{2000} + y^{2000} = a? \end{cases}$$
3. Дана функция $f(x+a) = \frac{1+f(x)}{1-f(x)}$.
а) Докажите, что функция периодическая.
б) Может ли она быть непрерывной на всей числовой оси?

РЕГИОНАЛЬНАЯ ОЛИМПИАДА ПО МАТЕМАТИКЕ

Вариант 2

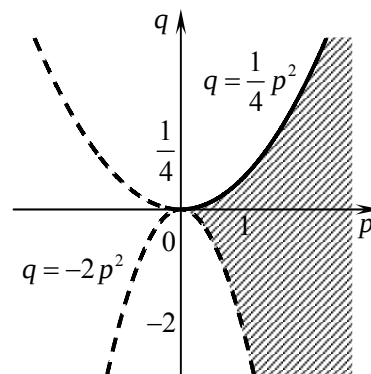
1. а) Сколько существует треугольников с целочисленными сторонами периметра 43?
б) Пусть $p(x)$ — квадратный трехчлен. Докажите, что найдется такое натуральное число k , что уравнение $p(x) + p(x+1) + \dots + p(x+k) = 0$ не имеет решений.
в) Через некоторую точку внутри треугольника площади S проведены прямые, параллельные его сторонам. Пусть S_1, S_2, S_3 — площади треугольников, отсекаемых этими прямыми. Докажите, что $\sqrt{S_1} + \sqrt{S_2} + \sqrt{S_3} = 2\sqrt{S}$.
г) Пусть в пространстве имеется точка P , координаты которой положительны. Обозначим через A, B и C точки пересечения плоскости, проходящей через точку P с положительными лучами на осях координат. Докажите, что среди всех треугольных пирамид $OABC$ (O — начало координат) наименьший объем имеет та, у которой P есть точка пересечения медиан граней ABC .
2. а) Решите систему
$$\begin{cases} |x+y| + |x-y| = 6, \\ y+1 + |x-1| = 0. \end{cases}$$

б) Изобразите на плоскости множество всех точек с координатами $(p; q)$, таких что уравнение $x^2 + pq + q = 0$ имеет единственный корень на интервале $(-p; p)$.
в) Найдите все значения параметра b , при которых уравнение $\frac{b \cdot 16^{x^2-1} + 12^{x^2}}{2 \cdot 9^{x^2} - 12^{x^2}} = 1$ имеет решение.
г) Какое наибольшее число решений может иметь система
$$\begin{cases} x^2 + y^2 = a, \\ x^{2001} + y^{2001} = 10? \end{cases}$$
3. Дана функция $f(x+a) = \frac{2}{2-f(x)}$.
а) Докажите, что функция периодическая.
б) Может ли она быть непрерывной на всей числовой оси?

РЕГИОНАЛЬНАЯ ОЛИМПИАДА ПО МАТЕМАТИКЕ

Ответы к варианту 1

1. а) 33; г) $\frac{1}{27}$. 2. а) $\left\{ \left(2; \frac{1}{2} \right); \left(-\frac{3}{2}; 2 \right) \right\}$; б) при $p > 0$ это
множество точек, заданное неравенствами $-2p^2 < q \leq \frac{1}{4}p^2$
(см. рисунок); в) $\left[-2; \frac{1}{4} \right)$; г) 8. 3. б) нет, не может.



РЕГИОНАЛЬНАЯ ОЛИМПИАДА ПО МАТЕМАТИКЕ

Ответы к варианту 2

1. а) 44. 2. а) $\{(3; -2); (0; -3)\}$; б) при $p > 0$ это множество точек, заданное уравнением $4q = p^2$ и неравенствами $-2p^2 < q < 0$ (см. рисунок); в) $(-8; 0)$; г) 4.

