

Санкт-Петербургский государственный университет, 2002
математико-механический факультет

РЕГИОНАЛЬНАЯ ОЛИМПИАДА ПО МАТЕМАТИКЕ

Вариант 1

1. а) Найдите все натуральные решения уравнения $xuz = 2x + y - 2z$.
б) Сколько существует различных непрерывных на вещественной оси функций, графики которых лежат в объединении прямых $y = 1$, $y = x$, $y = -x$, $y = 2x - 2$?
в) В выпуклом четырехугольнике $ABCD$ известны площади треугольников: $S_{ABO} = 1$ и $S_{CDO} = 25$ (O — точка пересечения диагоналей). Докажите, что площадь этого четырехугольника не меньше 36.
г) Обозначим через $d(M)$ расстояние от любой точки M пространства до самой удаленной от нее вершины пирамиды, в основании которой лежит равносторонний треугольник со стороной $\sqrt{2}$, а боковые ребра равны 0,9. Найдите наименьшее возможное значение $d(M)$.
2. а) Решите уравнение $\log_4(x-3)^2 + \log_2(2x+6) = 4$.
б) Решите неравенство $\frac{4\sqrt{x+2}-9}{x} < \frac{1}{2}$.
в) Определите в зависимости от a количество решений системы
$$\begin{cases} xy + x + y = 8, \\ xy(x + y) = a. \end{cases}$$

г) Найдите все значения параметра a , при которых множество на координатной плоскости, заданное уравнением $|x| + |y| + |2x + y - 2| = a$, является четырехугольником.
3. Найдите наибольшее возможное значение суммы косинусов углов
а) Равнобедренного треугольника.
б) Произвольного треугольника.

РЕГИОНАЛЬНАЯ ОЛИМПИАДА ПО МАТЕМАТИКЕ

Вариант 2

1. а) Найдите все натуральные решения уравнения $xyz + 4x = 2(y + z)$.
б) Сколько существует различных непрерывных на вещественной оси функций, графики которых лежат в объединении прямых $y = 1$, $y = x$, $y = -x$, $y = 2x + 1$?
в) В выпуклом четырехугольнике $ABCD$ известны площади треугольников: $S_{ABO} = 4$ и $S_{CDO} = 9$ (O — точка пересечения диагоналей). Докажите, что площадь этого четырехугольника не меньше 25.
г) Обозначим через $d(M)$ расстояние от любой точки M пространства до самой удаленной от нее вершины пирамиды, в основании которой лежит равносторонний треугольник со стороной $\sqrt{3}$, а боковые ребра равны 1,2. Найдите наименьшее возможное значение $d(M)$.
2. а) Решите уравнение $\log_{49}(4 - x)^2 + \log_7(x + 28) = 2$.
б) Решите неравенство $\frac{2 - \sqrt{3 - x}}{x} < \frac{1}{6}$.
в) Определите в зависимости от a количество решений системы
$$\begin{cases} xy + x + y = b, \\ xy(x + y) = 16. \end{cases}$$

г) Найдите все значения параметра a , при которых множество на координатной плоскости, заданное уравнением $|x| + |y| + |x - 3y + 3| = a$ является четырехугольником?
3. Найдите наибольшее возможное значение произведения косинусов углов
а) Равнобедренного треугольника.
б) Произвольного треугольника.

Санкт-Петербургский государственный университет, 2002
математико-механический факультет

РЕГИОНАЛЬНАЯ ОЛИМПИАДА ПО МАТЕМАТИКЕ

Ответы к варианту 1

1. а) $\{(1; t; 1); (t; 2; 1) : t \in \mathbb{Z}\}$; б) 41; г) $\frac{\sqrt{6}}{3}$. 2. а) $\{-1; 1; \sqrt{17}\}$; б) $(0; 14) \cup (14; +\infty)$; в) при $a < -128$: 4 решения, при $a = -128$: 3 решения, при $-128 < a < 16$: два решения, при $a = 16$: одно решение, при $a > 16$: решений нет; г) $(1; 2]$. 3. $\frac{3}{2}$.

Санкт-Петербургский государственный университет, 2002
математико-механический факультет

РЕГИОНАЛЬНАЯ ОЛИМПИАДА ПО МАТЕМАТИКЕ

Ответы к варианту 2

1. а) $\{(1; 2; t); (1; t; 2) : t \in \mathbb{Z}\}$; б) 36; г) 1. 2. а) $\{-3; 3; \sqrt{23}\}$; б) $(-\infty; -6) \cup (-6; 0)$; в) при $b < -8$: 4 решения, при $b = -8$ и $b > 8$: 2 решения, при $b = 8$: одно решение, при $-8 < b < 8$: решений нет; г) $(1; 3]$. 3. $\frac{1}{8}$.