

Санкт-Петербургский государственный университет, 2003
математико-механический факультет

РЕГИОНАЛЬНАЯ ОЛИМПИАДА ПО МАТЕМАТИКЕ

Вариант 1

1. Укажите все квадратичные трехчлены $x^2 + ax + b$ (a, b — вещественные числа), такие, что $x^6 + ax^3 + b$ делится на $x^2 + ax + b$ без остатка.
2. Сумма конечной убывающей арифметической прогрессии, одним из членов которой является -1 , равна 0 . Найдите ее разность, если известно, что произведение 7-го и 13-го членов равно 1 .
3. Решите неравенство $x^2 > 8 - \sqrt{x+8}$.
4. Решите неравенство $\frac{x-2}{2x-3} > \log_{\frac{x^2}{2}} \frac{x}{2}$.
5. Решите уравнение $\cos 2x - 1 = 3 \sin x - \sqrt{5} \cos x$.
6. Окружность, построенная на стороне AB остроугольного треугольника ABC как на диаметре, пересекает в точке K высоту, опущенную из вершины C . Докажите, что $CK \cdot HP = HK \cdot KP$, где P — основание высоты, а H — ортоцентр.
7. В равнобедренной трапеции $ABCD$ основания $AD = 33$ и $BC = 63$. Найдите радиус окружности, описанной вокруг трапеции, если известно, что отношение радиусов окружностей, вписанных в треугольники ABD и ABC , равно $\frac{2}{3}$.

РЕГИОНАЛЬНАЯ ОЛИМПИАДА ПО МАТЕМАТИКЕ

Вариант 2

1. Укажите все квадратичные трехчлены $x^2 + ax + b$ (a, b — вещественные числа), такие, что $x^6 + ax^3 + b$ делится на $x^2 - ax + b$ без остатка.
2. Сумма конечной возрастающей арифметической прогрессии, одним из членов которой является 1, равна 0. Найдите ее разность, если известно, что произведение 4-го и 11-го членов равно 1.
3. Решите неравенство $x^2 < 9 - \sqrt{9 - x}$.
4. Решите неравенство $\frac{x+2}{2x-6} > \log_{\frac{x^2}{8}} 2x$.
5. Решите уравнение $\cos 2x + 1 = \sin x + \sqrt{5} \cos x$.
6. Перпендикуляр, восстановленный из точки K , лежащей на гипотенузе AB прямоугольного треугольника ABC , пересекает катет AC в точке N и продолжение катета BC в точке D . Докажите, что $MK^2 = DK \cdot KN$, где M — точка пересечения отрезка KD с окружностью, описанной около треугольника ABC .
7. В равнобедренной трапеции $ABCD$ диагональ $BD = 15$ и боковая сторона $CD = 13$. Найдите площадь трапеции, если известно, что отношение радиусов окружностей, вписанных в треугольники ABC и ABD , равно $\frac{3}{8}$.

РЕГИОНАЛЬНАЯ ОЛИМПИАДА ПО МАТЕМАТИКЕ

Ответы к варианту 1

1. x^2 , $x^2 - x$, $x^2 + x$, $x^2 - 1$, $x^2 + 1$, $x^2 - 2x + 1$, $x^2 + 2x + 1$; 2. $d = -\frac{1}{4}$;
3. $\left[-8; \frac{1-\sqrt{33}}{2}\right) \cup \left(\frac{-1+\sqrt{29}}{2}; +\infty\right)$; 4. $(2; \sqrt{8}) \cup (3; 4)$;
5. $\left\{\frac{1}{2}\arcsin\frac{3\sqrt{5}-5}{2} + 2\pi k; -\frac{1}{2}\arcsin\frac{3\sqrt{5}-5}{2} - \pi + 2\pi k : k \in \mathbb{Z}\right\}$; 7. $R = \frac{65}{2}$.

РЕГИОНАЛЬНАЯ ОЛИМПИАДА ПО МАТЕМАТИКЕ

Ответы к варианту 2

1. x , $x^2 - 1$, $x^2 + 1$, $x^2 - \sqrt{2}x + 1$, $x^2 + \sqrt{2}x + 1$; 2. $a_1 = -\frac{7}{4}$; 3. $\left(\frac{1-\sqrt{33}}{2}; \frac{-1+\sqrt{37}}{2}\right)$;
4. $(0; 1) \cup \left(\sqrt{2}; \frac{3}{2}\right) \cup (2; +\infty)$; 5. $\left\{\frac{1}{2}\arcsin\frac{1-\sqrt{5}}{2} + 2\pi k; \frac{\pi}{2} - \frac{1}{2}\arcsin\frac{1-\sqrt{5}}{2} + 2\pi k : k \in \mathbb{Z}\right\}$; 7. $S = 108$.