

Санкт-Петербургский государственный университет, 2004
математико-механический факультет

РЕГИОНАЛЬНАЯ ОЛИМПИАДА ПО МАТЕМАТИКЕ

Вариант 1

1. Найдите все последовательности $a_1, a_2, \dots$, удовлетворяющие рекуррентному соотношению $a_{n+1} = 2a_n^2 - 1$, для которых произведение $(1 + 2a_n) \cdot a_{n+1}$ постоянно.
2. Решите неравенство $\log_x(5 + x + x^2) \geq \log_2 5$.
3. Решите уравнение $3^{3x-x^2-1} = 2 + 3^{x^3-1}$.
4. Решите систему уравнений
$$\begin{cases} \sqrt{3x+y} - \sqrt{2x-y} = 2, \\ \sqrt{3x+y} - \sqrt{2y-x} = 1. \end{cases}$$
5. Найдите все многочлены вида $x^3 + ax^2 + (1-2c)x + c$, имеющие ровно два различных корня, если известно, что сумма корней равна -1 .
6. Найдите все значения параметра a , при которых уравнение $|a + 13\sin x| + |a - 13\cos x| = 2 + a$ имеет решение.
7. На дуге AB некоторой окружности взята точка C . Известно, что $AC = 5$ и $AB = 3$. Найдите BK , где K — основание перпендикуляра, опущенного из середины дуги AB на прямую BC .
8. Найдите все значения параметра a , при которых уравнение $(x^2 - 10x + 9)(x^2 - 12x + 20) = a$ имеет четыре различных целых корня.

РЕГИОНАЛЬНАЯ ОЛИМПИАДА ПО МАТЕМАТИКЕ

Вариант 2

1. Найдите все последовательности $a_1, a_2, \dots$, удовлетворяющие рекуррентному соотношению $a_{n+1} = 1 - 2a_n^2$, для которых отношение $\frac{1 - 2a_n}{a_{n+1}}$ постоянно.
2. Решите неравенство $\log_x(11 + 10x - x^2) \leq \log_{\sqrt[3]{2}} 3$.
3. Решите уравнение $2^{2-2x-x^2} = 3 + 2^{x^3+x^2-8x}$.
4. Решите систему уравнений
$$\begin{cases} \sqrt{x+3y} - \sqrt{2x-y} = 1, \\ \sqrt{x+3y} - \sqrt{x-y} = 2. \end{cases}$$
5. Найдите все многочлены вида $x^3 + ax^2 + (1+2c)x + c$, имеющие ровно два различных корня, если известно, что сумма корней равна 1.
6. Найдите все значения параметра a , при которых уравнение $|a - 10 \cos t| + |a - 10 \sin t| = -1 + \frac{a}{2}$ имеет решение.
7. На дуге AB некоторой окружности взята точка C . Известно, что $AC = 7$ и $BC = 3$. Найдите AE , где E — основание перпендикуляра, опущенного из середины дуги AB на прямую AC .
8. Найдите все значения параметра a , при которых уравнение $(x^2 - 7x - 8)(x^2 - 11x + 10) = a$ имеет четыре различных целых корня.

Санкт-Петербургский государственный университет, 2004
математико-механический факультет

РЕГИОНАЛЬНАЯ ОЛИМПИАДА ПО МАТЕМАТИКЕ

Ответы к варианту 1

1. Пять последовательностей, первыми членами которых являются: $a_1 = 1$, $a_1 = -\frac{1}{2}$, $a_1 = \cos \frac{2\pi}{7}$, $a_1 = \cos \frac{4\pi}{7}$, $a_1 = \cos \frac{8\pi}{7}$; 2. $(1; 4]$; 3. $\{1\}$; 4. $\{(2; 3)\}$; 5. $x^3 - 3x + 2$ и $x^3 + 2x^2 + x$; 6. $[5; 2 + 13\sqrt{2}]$; 7. $BK = 4$; 8. $a = 0$ и $a = 180$.

Санкт-Петербургский государственный университет, 2004
математико-механический факультет

РЕГИОНАЛЬНАЯ ОЛИМПИАДА ПО МАТЕМАТИКЕ

Ответы к варианту 2

1. Четыре последовательности, первыми членами которых являются: $a_1 = -1$, $a_1 = \frac{1}{2}$, $a_1 = -\cos \frac{2\pi}{5}$,
 $a_1 = -\cos \frac{4\pi}{5}$; 2. $(0; 1) \cup [2; 11)$; 3. $\{0\}$; 4. $\{(3; 2); (1; 1)\}$; 5. $x^3 - 3x - 2$ и $x^3 - 2x^2 + x$;
6. $\left[6; \frac{20\sqrt{2}-2}{3}\right]$; 7. $AE = 5$; 8. $a = 0$ и $a = 360$.