

Санкт-Петербургский государственный университет, 2007
математико-механический факультет

РЕГИОНАЛЬНАЯ ОЛИМПИАДА ПО МАТЕМАТИКЕ

Вариант 1

1. В конечной арифметической прогрессии первый член равен 1, а из остальных членов только последний является целым числом. Найти разность прогрессии, если известно, что сумма ее первых пятнадцати членов равна сумме последних семи.
2. Решить уравнение $\frac{1}{3 \sin x + \cos x} + \frac{1}{\sin x - 3 \cos x} = \frac{1}{2\sqrt{2}}$.
3. Решить неравенство $\sqrt[3]{2x^2 - 8x + 7} + \sqrt[3]{x^2 + 5x - 6} \leq 1$.
4. Около окружности с центром O описана трапеция $ABCD$. Найти её площадь, если известно, что $OA = 5$, $OB = 9$, $OC = 3$ и $AB \parallel CD$.
5. Найти наибольшее значение параметра a , при котором уравнение $\log_{x-a}(x^2 - x - 1) = 2$ имеет целый корень.
6. Пристани A и B расположены на берегу реки. В 7 часов утра из A в сторону B по течению отправился плот. В тот же момент из B в A отплыла лодка. Встретившись с плотом точно в полдень и доплыв до A , она мгновенно повернула обратно и вернулась в B раньше 7 часов вечера. Где находился плот в 7 часов вечера относительно B (выше или ниже по течению)?
7. В пространстве фиксирована точка O . Какую наибольшую площадь может иметь параллелограмм, у которого расстояния от вершин до точки O равны 2, 5, 5 и 8 метров?

РЕГИОНАЛЬНАЯ ОЛИМПИАДА ПО МАТЕМАТИКЕ

Вариант 2

1. В конечной арифметической прогрессии первый член равен 1, а из остальных членов только последний является целым числом. Найти разность прогрессии, если известно, что сумма её первых тринадцати членов равна сумме последних четырёх.
2. Решить уравнение $\frac{1}{2 \sin x - \cos x} + \frac{1}{\sin x + 2 \cos x} = \frac{2\sqrt{2}}{3}$.
3. Решить неравенство $\sqrt[3]{x^2 + 5x + 5} + \sqrt[3]{2x^2 - 2x - 4} \leq 1$.
4. Около окружности с центром O описана трапеция $ABCD$. Найти ее основание CD , если известно, что $OA = 28$, $OB = 4$, $OC = 7$.
5. Найти наименьшее значение параметра a , при котором уравнение $\log_{a-x}(x^2 - 3x + 1) = 2$ имеет целый корень.
6. Пристани A и B расположены на берегу реки. В 10 часов утра из A в сторону B по течению отправился плот. В тот же момент из B в A отплыла лодка. Встретившись с плотом точно в полдень и доплыв до A , она мгновенно повернула обратно и вернулась в B позже 3 часов дня. Где находился плот в 3 часа дня относительно B (выше или ниже по течению)?
7. В пространстве фиксирована точка O . Какую наибольшую площадь может иметь параллелограмм, у которого расстояния от вершин до точки O равны 2, 5, 5 и 10 метров?

РЕГИОНАЛЬНАЯ ОЛИМПИАДА ПО МАТЕМАТИКЕ

Ответы к варианту 1

1. $d = \frac{8}{21}$; 2. $-\frac{3\pi}{4} + 2\pi k, \arctg \frac{1}{7} + 2\pi k \ (k \in \mathbb{Z})$; 3. $x \in \left[\frac{-1-\sqrt{13}}{2}, 1 \right] \cup \left[\frac{-1+\sqrt{13}}{2}, 2 \right]$;

4. $S_{ABCD} = \frac{576}{13}$; 5. $3 - \sqrt{5}$; 6. Выше по течению относительно B ; 7. 40 кв. м.

Санкт-Петербургский государственный университет, 2007
математико-механический факультет

РЕГИОНАЛЬНАЯ ОЛИМПИАДА ПО МАТЕМАТИКЕ

Ответы к варианту 2

1. $d = \frac{9}{28}$; 2. $-\frac{\pi}{4} + 2k\pi, \quad \pi + \arctg \frac{1}{7} + 2k\pi \quad (k \in \mathbb{Z})$; 3. $x \in [-2, -\sqrt{2}] \cup [-1, \sqrt{2}]$;
4. $CD = \frac{21\sqrt{65}}{26}$; 5. $-1 + \sqrt{5}$; 6. Ниже по течению относительно B ; 7. 36 кв. м.