

Санкт-Петербургский государственный университет, 2008
математико-механический факультет

РЕГИОНАЛЬНАЯ ОЛИМПИАДА ПО МАТЕМАТИКЕ

Вариант 1

1. Какое максимальное значение может иметь сумма первых восьми членов арифметической прогрессии, у которой сумма квадратов первого, четвертого и седьмого членов равна 2?
2. Решить уравнение $\frac{x(7-x)}{x^2-3} = \sqrt{10-x}$.
3. Решить неравенство $\log_{6-4x} |x| \cdot \log_3 \left| \frac{18}{x} - 12 \right| \geq 1$.
4. В трапецию с основаниями 4 и 12 помещены две окружности, касающиеся друг друга внешним образом. Каждая из окружностей касается боковых сторон и одного из оснований. Найти радиус окружности, касающейся большего основания, если известно, что расстояние между точками касания, лежащими на боковой стороне трапеции, равно 6.
5. Решить уравнение $\arcsin\left(\frac{4}{3}-x\right) - \arcsin(x-1) = \frac{2\pi}{3}$.
6. Имеется два бака с водой A и B . Одновременно из каждого бака отбирают треть содержимого. Отобранное из A выливают в B , а отобранное из B – в A . После того, как операцию повторили еще два раза, в баке A оказался 351 литр воды. Затем операцию повторили еще три раза. Сколько воды стало в A , если в B в этот момент оказалось b литров? Указать, при каких значениях b задача имеет решение.
7. При каких значениях параметра a система
$$\begin{cases} ax^2 + y = 5x^2y, \\ 2x^2 - 3y = ax^2y \end{cases}$$
 имеет единственное решение?

РЕГИОНАЛЬНАЯ ОЛИМПИАДА ПО МАТЕМАТИКЕ

Вариант 2

1. Какое минимальное значение может иметь сумма первых девяти членов арифметической прогрессии, у которой сумма квадратов третьего, четвертого и пятого членов равна 2?
2. Решить уравнение $\frac{x(3+x)}{2-x^2} = \sqrt{5+x}$.
3. Решить неравенство $\log_{7-5x} |x| \cdot \log_2 \left| \frac{14}{x} - 10 \right| \leq 1$.
4. В трапецию с основаниями 4 и 8 помещены две окружности, касающиеся друг друга внешним образом. Каждая из окружностей касается боковых сторон и одного из оснований. Найти радиус окружности, касающейся меньшего основания, если известно, что расстояние между точками касания, лежащими на боковой стороне трапеции, равно 4.
5. Решить уравнение $\arccos\left(\frac{3}{2}-x\right) + \arccos\left(\frac{1}{2}-x\right) = \frac{2\pi}{3}$.
6. Имеется два бака с водой A и B . Одновременно из каждого бака отбирают четверть содержимого. Отобранное из A выливают в B , а отобранное из B – в A . После того, как операцию повторили еще три раза, в баке A оказалось 340 литров воды. Затем операцию повторили еще два раза. Сколько воды стало в B , если в A в этот момент оказалось a литров? Указать, при каких значениях a задача имеет решение.
7. При каких значениях параметра b система
$$\begin{cases} bx - 4y^2 = 4xy^2, \\ 2x + 3y^2 = bxy^2 \end{cases}$$
 имеет единственное решение?

РЕГИОНАЛЬНАЯ ОЛИМПИАДА ПО МАТЕМАТИКЕ

Ответы к варианту 1

1. $\frac{20}{3}$; 2. $x_1 = \frac{-1 + \sqrt{41}}{2}$, $x_2 = \frac{9 - 3\sqrt{13}}{2}$; 3. $x \in (-\infty, -3] \cup [\frac{6}{5}, \frac{5}{4})$; 4. $\sqrt{15}$; 5. $x = \frac{7 - 2\sqrt{6}}{6}$;
6. $\frac{13}{14}(b + 27)$ литров, задача имеет решение при $b \in (338, 365)$;
7. при $a \in \{-15\} \cup [-\sqrt{10}, -\frac{2}{3}] \cup [\sqrt{10}, +\infty)$.

РЕГИОНАЛЬНАЯ ОЛИМПИАДА ПО МАТЕМАТИКЕ

Ответы к варианту 2

1. $-3\sqrt{15}$; 2. $x_1 = \frac{1-\sqrt{21}}{2}$, $x_2 = -2+2\sqrt{2}$; 3. $x \in [-2, 0) \cup (0, \frac{7}{6}) \cup (\frac{6}{5}, \frac{7}{5})$; 4. $\sqrt{3}$; 5. $x = 1 - \frac{1}{\sqrt{6}}$;

6. $\frac{5}{3}(a-136)$ литров, задача имеет решение при $a \in (325, 357)$;

7. при $b \in [-3, -\frac{8}{3}] \cup \{2\sqrt{2}\}$.