

Санкт-Петербургский государственный университет, 2009
математико-механический факультет

РЕГИОНАЛЬНАЯ ОЛИМПИАДА ПО МАТЕМАТИКЕ

Вариант 1

1. Арифметическая прогрессия, одним из членов которой является число 1, имеет два соседних члена, сумма которых равна 10. Найти сумму всех членов прогрессии, лежащих в промежутке $\left(\frac{7}{5}; \frac{11}{3}\right]$, если известно, что их ровно семь.
2. Решить уравнение $\sin x - \cos x = \frac{1}{2} \sin 2x - |\cos x|$.
3. Найти все значения параметра a , при которых уравнение $\sqrt{x^2 + 4x^3} = -ax - x^3$ имеет единственное решение.
4. Решить неравенство $\log_2(x-1)^6 \cdot \log_3 x - \log_3(x-1)^2 \geq 2 - \log_2 x^6$.
5. В треугольнике ABC угол при вершине A в два раза больше угла при вершине B , $AB = 6$ и $BC = a$. Указать все значения a , при которых треугольник является тупоугольным.

РЕГИОНАЛЬНАЯ ОЛИМПИАДА ПО МАТЕМАТИКЕ

Вариант 2

1. Арифметическая прогрессия, одним из членов которой является число 2, имеет два соседних члена, сумма которых равна 9. Найти сумму всех членов прогрессии, лежащих в промежутке $\left(\frac{11}{5}; \frac{33}{8}\right]$, если известно, что их ровно семь.
2. Решить уравнение $\sin x + \cos x = \frac{1}{2} \sin 2x - |\cos 2x|$.
3. Найти все значения параметра a , при которых уравнение $\sqrt{x^2 - 6x^3} = ax - 2x^3$ имеет единственное решение.
4. Решить неравенство $\log_3(x-2)^4 \cdot \log_2 x - \log_2(x-2)^2 \leq 2 - \log_3 x^4$.
5. В треугольнике ABC угол при вершине C в два раза больше угла при вершине B , $AB = 2$ и $BC = a$. Указать все значения a , при которых треугольник является тупоугольным.

Санкт-Петербургский государственный университет, 2009

математико-механический факультет

РЕГИОНАЛЬНАЯ ОЛИМПИАДА ПО МАТЕМАТИКЕ

Ответы к варианту 1

1. $\frac{91}{5}$; 2. $2k\pi, -\frac{\pi}{2} + 2k\pi, \arctg \frac{3}{4} + (1 + 2k\pi)\pi, \arctg \frac{3}{4} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$; 3. $a \in (-\infty; -1) \cup \left(-\frac{1}{4}; 1\right]$;
4. $x \in \left[\frac{2}{3}; 1\right) \cup (1; \sqrt[3]{2}] \cup \left[\frac{4}{3}; +\infty\right)$; 5. $a \in (3; 3\sqrt{3}) \cup (6\sqrt{2}; +\infty)$.

РЕГИОНАЛЬНАЯ ОЛИМПИАДА ПО МАТЕМАТИКЕ

Ответы к варианту 2

1. $\frac{378}{17}$; 2. $\pi + 2k\pi, -\frac{\pi}{2} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$; 3. $a \in [-1, \frac{1}{3}) \cup [1; +\infty)$; 4. $x \in \left(0; \frac{3}{2}\right] \cup [\sqrt{3}; 2) \cup \left(2; \frac{5}{2}\right]$;
5. $a \in (0; \sqrt{2}) \cup \left(\frac{4}{\sqrt{3}}; 3\right)$.