

Санкт-Петербургский государственный университет
факультет прикладной математики – процессов управления
1997-1998 учебный год

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ОЛИМПИАДА ТРЕТИЙ ЗАОЧНЫЙ ТУР

1. Запишите с помощью радикалов значения функций: а) $\sin 75^\circ$; б) $\cos 22,5^\circ$.
2. Решите уравнение $e^{\lg x} = \sqrt{4 - 2e^{\lg x}}$.
3. В равнобедренном треугольнике даны боковая сторона a и основание b . Выразите через a и b косинус утроенного угла при основании треугольника.
4. Решите уравнение $\sin\left(\pi x + \frac{\pi}{4}\right) \cdot \sin\left(\pi x - \frac{\pi}{12}\right) = \frac{1}{2}$.
5. Решите уравнение $(\sin x - 5)\cos^4 x - 4(3\sin x - 5)\cos^2 x + 16(\sin x - 1) = 0$.
6. Решите уравнение $\operatorname{tg}^3 x + \cos^{-3} x = 3$.
7. Вычислите сумму $S_n = \operatorname{ctg}\alpha_1 \cdot \operatorname{ctg}\alpha_2 + \operatorname{ctg}\alpha_2 \cdot \operatorname{ctg}\alpha_3 + \dots + \operatorname{ctg}\alpha_n \cdot \operatorname{ctg}\alpha_{n+1}$, где $\alpha_1, \alpha_2, \dots$ — элементы арифметической прогрессии с разностью β .
8. Решите относительно x уравнение $(\cos x - \sin x)(1 + \operatorname{tg}^x \alpha + \operatorname{tg}^{2x} \alpha + \operatorname{tg}^{3x} \alpha + \dots) = \frac{\cos^3 x}{1 + \frac{1}{2} \sin 2\alpha}$,
если $0 < \alpha < \frac{\pi}{4}$.
9. Решите неравенство $\operatorname{tg} x \cdot \operatorname{tg} 3x < -1$.
10. Найдите все $\alpha \in [-\pi; 0]$, удовлетворяющие уравнению $\sin \alpha + \int_a^{2a} \cos 2x dx = 0$.