

Санкт–Петербургский государственный университет
факультет прикладной математики – процессов управления
1998-1999 учебный год

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ОЛИМПИАДА ТРЕТИЙ ЗАОЧНЫЙ ТУР

1. Ученик при перемножении двух чисел, одно из которых на 94 больше другого, ошибся, уменьшив в произведении цифру десятков на 4. При делении ошибочного произведения на больший из множителей он получил в частном 52, а в остатке 107. Какие числа он перемножал?
2. Число десятков некоторого двузначного числа на единицу больше числа единиц. Произведение же этого числа на число, записанное в обратном порядке, равно 2430. Каково данное число?
3. Найдите все двузначные числа, которые делятся на произведение своих цифр.
4. Покажите, что $27195^8 - 10887^8 + 10152^8$ делится без остатка на 26460.
5. В какой системе счисления верна запись $432 \cdot 12 = 5084$?
6. Найти сумму $s = 7 + 77 + 777 + \dots + 777 \dots 77$, где последнее слагаемое содержит n цифр.
7. Найдите наименьшее натуральное число, обладающее такими свойствами: его половина — квадрат целого числа, его треть — куб целого числа, его пятая часть — пятая степень целого числа.
8. Найдите четырехзначное число, представляющее собой точный квадрат, причем первая цифра в нем одинакова со второй, а третья — с четвертой.
9. Докажите, что всякое число вида $444 \dots 44888 \dots 89$ является точным квадратом некоторого числа. Найдите вид последнего. Здесь «4» повторена $k+1$ раз, а «8» повторена k раз.
10. Найдите сумму $S_n = 1 \cdot 1! + 2 \cdot 2! + 3 \cdot 3! + \dots + n \cdot n!$
11. Найдите двузначное число, квадрат которого равен сумме факториалов его цифр.
12. Выписаны подряд натуральные числа 1234...9101112... Найдите цифру, стоящую на 206778-м месте.